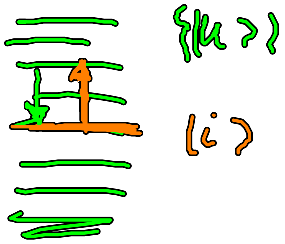
Mastergleichung (Diagonalelemente d. Dichtematrix)

$$\dot{\rho}_{ii}(t) = -\underbrace{\int_0^t ds}_{\substack{\text{Integration über}\\\text{alle Zeiten seit}\\\text{WW-Beginn}\\\hat{=}\ \text{Gedächtniseffekt}}} \sum_{n\neq i} \underbrace{K_{iinn}(s)}_{\substack{\text{Wechselwirkungs-}\\\text{stärke}}} \Big(\underbrace{\underbrace{\rho_{nn}(t-s)}_{\substack{\text{Übergänge}\\|n\rangle \to |i\rangle}} - \underbrace{\rho_{ii}(t-s)}_{\substack{\text{Übergänge}\\|i\rangle \to |n\rangle}}}_{\text{sieht man später genauer}} \Big)$$

beschreibt die Umverteilung v. Wahrscheinlichkeit f. Besetzung durch Wechselwirkung K_{iinn}.



Wahrscheinlichkeitsfluß

$$K_{iinn}(s) = \Big(\underset{\text{WW}}{L_v}\, \overset{\text{freie Bewegg.}}{e^{-iL_0 s}}\, L_v \Big)_{iinn}$$

Produktsatz:

$$= \underbrace{(L_V)_{\underline{ii}ab}}_{①} \underbrace{(e^{-iL_0 s})_{abcd}}_{②} \underbrace{(L_V)_{cd\underline{nn}}}_{③ \text{ bekannt}}$$

$$① \quad (L_V)_{iiab} = \frac{1}{\hbar}\left(V_{ia}\,\delta_{ib} - V_{bi}\,\delta_{ai}\right)$$ lt. voriger VL

$$② \quad (e^{iL_0 s})_{abcd} = \underbrace{\left(e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}\right)_{ac}}_{\langle a | e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} | c\rangle} \left(e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}\right)_{bd} = e^{-it\omega_c}\,\delta_{ac}\, e^{it\omega_d}\,\delta_{bd}$$

$$H_0 |c\rangle = \varepsilon_c |c\rangle$$

$$\frac{\varepsilon_c}{\hbar} = \omega_c$$

$$③ \quad (L_V)_{cdnn} = \frac{1}{\hbar}\left(V_{cn}\,\delta_{dn} - V_{nd}\,\delta_{nc}\right)$$

einsetzen und Kroneckersymbole ausführen (Summe abcd)

$$K_{iinn}(s) = -\frac{|V_{in}|^2}{\hbar^2}\, 2\cos\left((\omega_n - \omega_i)s\right)$$

Quanteninterferenz zwischen Zuständen

$$\dot{\rho}_{ii}(t) = 2\int_0^\infty ds \sum_{n\neq i} \frac{|V_{in}|^2}{\hbar^2}\cos((\underline{\omega_n-\omega_i})s)\left(\rho_{nn}(t-\cancel{s}) - \rho_{ii}(t-\cancel{s})\right)$$

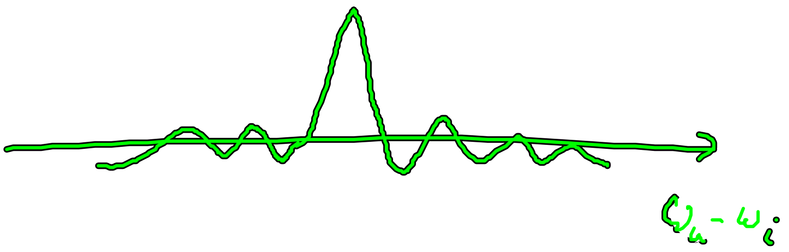
Gewinn v. Wahrscheinlichkeit

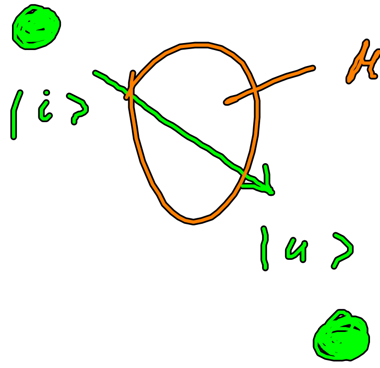
Verlust v. Wahrscheinlichkeit

$$\rho^{nn}_{ii}(t-s) \overset{!}{=} \rho^{nn}_{ii}(t)$$

Langsame Größe im Vergleich und der Kosinus oszillation

$$\int_0^t ds \cos(\omega_n-\omega_i)s = \frac{\sin(\omega_n-\omega_i)t}{\underbrace{(\omega_n-\omega_i)}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi\,\delta(\omega_n-\omega_i) \;\hat{=}\; \text{Energieerhaltung.}$$





Moment d. Übergang ist Energie erhaltend d.h. $\delta(\omega_n-\omega_i)$

$$\hookrightarrow\; \dot{\rho}_{ii}(t) = -\underbrace{\sum_n W_{i\to n}\,\rho_{ii}(t)}_{\text{Verlust}} + \underbrace{\sum_n W_{n\to i}\,\rho_{nn}(t)}_{\text{Gewinn}}$$

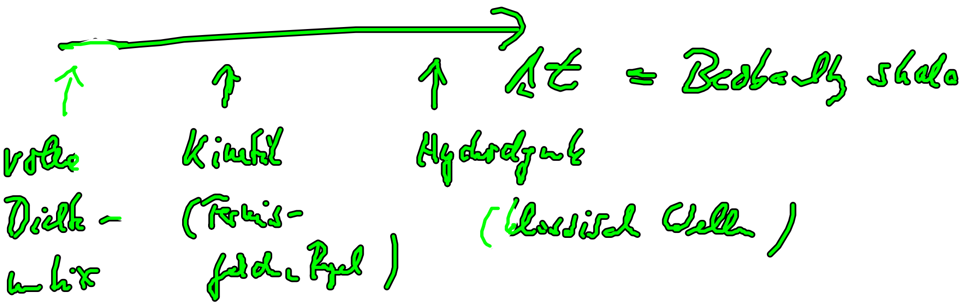
$$W_{\substack{i\to n \\ n\to i}} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |V_{in}|^2 \, \delta(\omega_n - \omega_i)$$

„ - - - - " Fermi's goldene Regel

abgeleitet durch: 1.) $\rho_{ij} = 0$ f. $i \neq j$

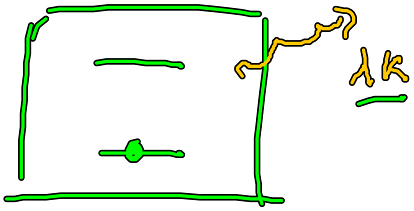
2.) Markoff-Näherg. $\rho_{nm}(t-s) \to \rho(t)$

3.) $t \to \infty$ → Energieerhaltg. und Vernachlässigg. v. Quanteninterferenzen



Beispiel f. Mastergleichung die mehr Info als Mittelwerte enthalten

Kopplg. Strahlungsfeld – Zweiniveausystem



Sinn: welche Statistik hat Lichtfeld?

$T = $ fest

kanonisch

$V_{ij} = ?$ f. Mastergleichg.

$$V = -\sum_{\lambda q} \left(g_q \, a_1^+ a_2 \, c_{\lambda q}^+ + g_q^* \, a_2^+ a_1 \, c_{\lambda q} \right)$$

$$\dot{\rho}_{ii} = -\sum_j w_{i \to j} \, \rho_i + \sum_j w_{j \to i} \, \rho_j \qquad w = (V_{ij})$$

$$|i\rangle = |\alpha\rangle \, |\{n_{\kappa i}\}\rangle \, , \quad |j\rangle = |\beta\rangle \, |\{n_{\kappa j}\}\rangle$$

↗ ungestört

Produktzustände v.
ZNS $|\alpha\rangle$ und
Feld $|\{n_{\kappa i}\}\rangle$

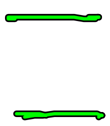
reell

$$V_{ij} \to V^{\alpha\beta}_{n_{\kappa i} n_{\kappa j}} = -\sum_q g_q \left(\underbrace{\langle\alpha| \langle n_{\kappa i}| \left(a_v^+ a_c \, c_q^+ + a_c^+ a_v \, c_q \right) |\beta\rangle}_{\langle\alpha| a_v^+ a_c |\beta\rangle \text{ als Bop}} |n_{\kappa j}\rangle \right)$$

Zweiniveau.

$2 \hat{=} c$

$1 \hat{=} v$



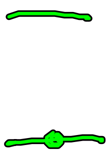
$|0\rangle \hat{=} |v, c\rangle = |0,0\rangle$

$\boxed{\text{Vakuum}}$

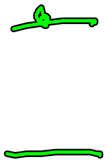
↑

Besetzungszahl oben / unten

c v



$|v\rangle = |1,0\rangle$



$|c\rangle = |0,1\rangle$

$$\langle \alpha | a_v^+ \underbrace{a_c |\beta\rangle}_{\delta_{c\beta}} = \delta_{c\beta}\,\delta_{\alpha v}$$

$$\underbrace{\langle \alpha \quad |v\rangle}_{\delta_{\alpha v}}$$

weiterhin $\langle n_{k_i} | \underline{c_q^+ | n_{k_j}}\rangle = \sqrt{n_q+1}\,\langle n_{k_i} | n_q+1\rangle$

wenn f. $k_j = q$ sind diese auszurechnen, ansonsten orthogonal

$$= \underline{\sqrt{n_q+1}}\;\delta_{n_q+1,\,n_{k_i}} \qquad \boxed{i \neq j}$$

alle Terme berechnen, einsetzen in $|V_{in}|^2$

es entsteht so was wie (n_q+1)

Kronecker symbole einsetzen und auswerten

$$\rho_i \to \rho^{\alpha}_{n_k}$$ Wahrscheinlichkeit Elektron in α (also v oder c) und n_k Photon in Zustand k zu finden

$\alpha,\ k_i = k$

interessiert uns für f. Licht: was ist die Wahrscheinlichkeit n_k Photon zu haben, ohne Rücksicht auf ZNS macht Sinn wenn man sich nur f. Photon interessiert

O – Operator der nur Photonoperatoren enthält

$c^+c\ ,\ c\ ,\ c^+c^+cc$

weil $|\alpha\rangle$ ZNS Zustand

$$\langle O \rangle = sp(\rho(t)\, O) = \sum_{n,\alpha} \langle n|\langle\alpha|\, \rho(t)\, O\, |\alpha\rangle|n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n| \sum_\alpha \rho^{\alpha\alpha}(t)\, O\, |n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|\, O \sum_\alpha \rho^{\alpha\alpha}(t)\, |n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|O|n\rangle \underbrace{\sum_\alpha \rho_n^{\alpha\alpha}(t)}$$

$$\boxed{\langle O \rangle = \sum_n O_{nn}\, \rho_n(t)}$$

$$\rho_n = \underline{\sum_\alpha \rho_n^{\alpha\alpha}(t)}$$ abgespurte Dichtematrix (Info ist verloren)

Messg. $\rho_i \rightarrow \rho_{nn}^{\alpha\alpha} = \rho_n^\alpha$

$$\downarrow \quad \dot{\rho}_n = \Gamma\left(\underline{\underline{n\rho^c_{n-1}}} - \underline{\underline{n\rho^v_n}} - (n+1)\underline{\rho^c_n} + (n+1)\underline{\underline{\rho^v_{n+1}}}\right)$$

↗ radiative Rate an VL über Photonratengl.

$$\rho_n = \rho^v_n + \rho^c_n$$

koppelt immer noch an ρ^c_n, ρ^v_n

$$\rho^c_n \overset{\sim}{=} \rho_n \sigma_c$$

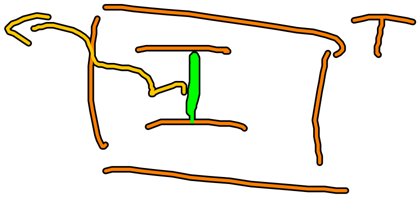
Näherung v. unabhängigen Wahrscheinlichkeit

ρ_n : n-Photon zu finden

σ_c : ZNS in „c" zu finden

σ_v : „ in „v" zu finden

Photonenratengleichung



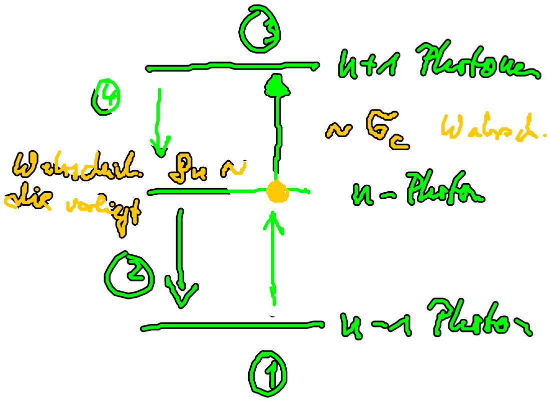
Verluste

$$\underbrace{\dot{\rho}_n} = \underbrace{\Gamma}\left(\overset{\textcircled{1}}{\sigma_c n\rho_{n-1}} \underbrace{- \overset{\textcircled{2}}{\sigma_v n\rho_n} - \overset{\textcircled{3}}{\sigma_c(n+1)\rho_n}} + \overset{\textcircled{4}}{\sigma_v(n+1)\rho_{n+1}}\right)$$

Wahrscheinlichkeit f n Photon bei WW und ZNS der Energieabstand $\omega_c - \omega_v$ zu finden wenn $\omega_c - \omega_v \approx$ Photonenenergie der Mode und n Photon

radiative Rate (ü A)

Verlust und Gewinnterm f. ρ_n A)



$\sim (n+1)$

↗ stimuliert

↖ spontan

vorher: Photonrate glg. als gl. f. Mittelwert

$$\langle \dot{n} \rangle = \Gamma \sigma_c - \Gamma (\sigma_v - \sigma_c) \langle n \rangle$$

$$\langle O \rangle = \sum_n O_{nn} \rho_n =$$

$$O = c^\dagger c$$

$$\langle n \rangle = \langle c^\dagger c \rangle = \sum_n n \rho_n$$

ρ_n bestimmt Mittelwert

$$g_2 = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2}$$ analog

Lösg.:

$$\dot{\rho}_0 = \Gamma(-\sigma_c \rho_0 + \sigma_v \rho_1)$$

$$\dot{\rho}_1 =$$

⋮

Anwendg. stationäre Lsg.

σ_c, σ_v = konstant

Zeitableitg = 0 setzen

$$\sigma_c \rho_0 = \sigma_v \rho_1 \rightarrow \rho_1 = \frac{\sigma_c}{\sigma_v} \rho_0$$

iterativ lösen, wenn ρ_0 bekannt

$$\rightarrow \rho_n = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_v} \right)^n \rho_0$$

$\rho_0 = ?$ aus $\sum_n \rho_n = 1$

f. $\sigma_c < \sigma_v$

$$\rho_n = \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_v}\right)\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_v}\right)^n \qquad *$$

$$\boxed{\text{thermisches Licht} \quad \rho_n = \frac{\langle n \rangle^n}{(1+\langle n \rangle)^{n+1}}} \qquad **$$

ρ_n kann in dieser Form gebraucht werden f.

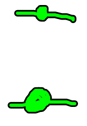
$$\langle n \rangle = \frac{\sigma_c}{\sigma_v - \sigma_c} \quad \text{aus Ratengl. oben}$$

f. dies $\langle n \rangle$ ist tatsächlich $*$ und $**$ identisch

$$\left.\langle n \rangle = \frac{1}{\frac{\sigma_v}{\sigma_c} - 1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_c - \varepsilon_v)\beta} - 1}\right\} \text{Planck-Verteilg.}$$

$$\sigma_v = e^{-\varepsilon_v \beta} N, \; \sigma_c = e^{-\varepsilon_c \beta} N$$

Damit ergibt sich f. stationäres Licht

mit $\sigma_c < \sigma_v$  die Planckverteilg.