

Zeitordnung: R. Feynman Physical Review 84 (1951)

Operator calculus having applications in QED

z.B. 
$$U = \overline{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt H(t)}$$
 mit  $H = H_0 + V(t)$

$$= \overline{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt (H_0 + V(t))} = \overline{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt H_0} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt V(t)}$$

analog Algebra mit Funktionen, geht nicht ohne spätes T zu beachten

V sei Störung: 
$$\approx \overline{T} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt V(t) \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt H_0}$$

$$\Delta U = \overline{T} \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt' H_0(t')} \right)$$

Änderung von U durch V in erster Ordnung.

$V(t)$  darf ins lib stehen, wenn  $t > t'$

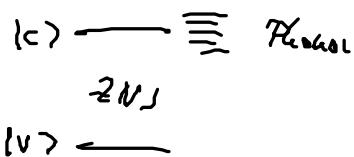
$$= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t_2} dt' H_0(t')} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t dt' H_0(t')}$$

$t' < t$

$H_0$  steht rechts von  $V$ !

### 3.2. Wicktheoreme

#### 3.2.1. Motivation zum IBM



Observable  $\langle \vec{q} | \vec{r} \rangle = \sum_{\alpha, \mu, \nu} \langle \alpha | \vec{q} | \mu \rangle \sum_{\alpha} \rho_{\mu\nu}^{\alpha\alpha}$

$\nearrow$  Dipoloperator  
 $\nearrow$   $\alpha, \mu, \nu$   
 Plasma ZNS Identität  $(\mu) (\nu)$   
 Spur

2 Niveaus  $= \overset{\rightarrow}{d}_{cv} \sum_{\alpha} \rho_{cv}^{\alpha\alpha} + c.c.$   
 $\mu, \nu = c, v$   $\langle c | \vec{q} | v \rangle =$

Elektron VL

$= \overset{\rightarrow}{d}_{cv} \underbrace{\rho_{cv}(0)}_{\text{Anfangsbeding. ZNS}} e^{-i\omega_{cv}t} \sum_{\alpha} \langle \alpha | \underbrace{V_{cv}(t, \beta_{\alpha})}_{\text{optisch Anreg.}} | \alpha \rangle + c.c.$

Anfangsbeding. ZNS  
optisch Anreg.

$\sum_{\alpha} \frac{(-i)^k}{k!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_k T \sum_{\alpha} g^{\alpha\beta} B_{\alpha}(t_k) \dots \sum_{\alpha} g^{\alpha\beta} B_{\alpha}(t_1)$

$\phi(t_1)$   $\phi(t_2)$

um weiter auszuwerten ist

$\sum_{\alpha} \langle \alpha |$   $|\alpha\rangle$  zu berechnen

interessant ist:  $\langle T \phi(t_1) \dots \phi(t_i) \dots \phi(t_n) \rangle$

$\langle \cdot \rangle = \text{Sp}_{\text{phon}} \left( \cdot \int_{\text{eq}}^{\text{ph}} \right)$

Achtung: Wick's Theorem: gibt Antwort wie es viele Operator felder in klein, handliche Bausteine zerlegt werden

3.2.2. Bosonen

$\langle T \phi(t_1) \dots \phi(t_i) \dots \phi(t_n) \rangle$

a) Bausteine  $D(t_1 - t_2) = \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle$  Phonon transfer  
Phononpropagator

$= \theta(t_1 - t_2) \langle \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle \phi(t_2) \phi(t_1) \rangle$

$$= \theta(t_1 - t_2) \text{sp}_{\text{ph}} \left( \sum_{\alpha_1, \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} (b_{\alpha_1}(t_1) + b_{\alpha_1}^\dagger(t_1)) (b_{\alpha_2}(t_2) + b_{\alpha_2}^\dagger(t_2)) \right) \frac{e^{-H_{\text{ph}} \beta}}{Z} + \underbrace{\{t_1 \leftrightarrow t_2\}}$$

$$= \theta(t_1 - t_2) \sum_{\alpha_1, \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \text{sp}_{\text{ph}} \left( b_{\alpha_1}(t_1) b_{\alpha_2}(t_2) + b_{\alpha_1}^\dagger(t_1) b_{\alpha_2}(t_2) e^{-\beta H_{\text{ph}}} \right) + \{t_1 \leftrightarrow t_2\}$$

$$= \theta(t_1 - t_2) \sum_{\alpha} g_{\alpha}^2 \left[ (1 + u_{\alpha}) e^{-i\omega_{\alpha}(t_1 - t_2)} + u_{\alpha} e^{+i\omega_{\alpha}(t_1 - t_2)} \right] + \{t_1 \leftrightarrow t_2\}$$

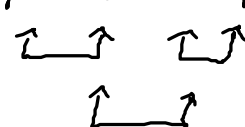
↑  
Besetzungszahl  
der Phononmodi

$$D(t_1 - t_2) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}^2 \left[ (1 + u_{\alpha}) e^{-i\omega_{\alpha}|t_1 - t_2|} + u_{\alpha} e^{+i\omega_{\alpha}|t_1 - t_2|} \right]$$

Phonon propagator

b/ 1. Vidtheorem

Zeitgeordnete Produkte von Bosonoperatoren  $\phi$  in WW Bild  
wird in alle Kombinationen des Fundbausteins zerlegt

$$\langle T \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \rangle = \sum_{\{\pi\}} \prod_{ab} \langle T \phi_a \phi_b \rangle$$


z.B.  $\langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle =$

$$\langle T \phi_1 \phi_2 \rangle \langle T \phi_3 \phi_4 \rangle + \langle T \phi_1 \phi_3 \rangle \langle T \phi_2 \phi_4 \rangle \\ + \langle T \phi_1 \phi_4 \rangle \langle T \phi_2 \phi_3 \rangle$$

### 3.2.3. Fermionen

$$\langle T a_1^+ a_2 a_3 a_4 \dots \rangle = ?$$

a/ Bausteine  $\overrightarrow{G}_{12}(t_1 - t_2) = \langle T a_1^+(t_1) a_2(t_2) \rangle$

$\overleftarrow{G}_{12}(t_1 - t_2) = \langle T a_1(t_1) a_2^+(t_2) \rangle$

$$\langle T \dots \rangle = \text{sp} (T \dots \rho_{el}^0)$$

↑  
flüchtigkeits statistischer  
operator

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G}_{u_1 u_2}(t_1 - t_2) &= \Theta(t_1 - t_2) e^{-i\omega_{u_1}(t_1 - t_2)} \delta_{u_1 u_2} f_{u_1} \\ &\quad + \Theta(t_2 - t_1) e^{+i\omega_{u_1}(t_1 - t_2)} \delta_{u_1 u_2} (1 - f_{u_1}) \end{aligned}$$

Elektron  
Löcher

$f_{u_1}$ : Besetzungszahl im flüchtigkeits (Fermi)

$$\overleftarrow{G}_{u_1 u_2}(t_1 - t_2) = \overrightarrow{G}_{u_1 u_2}(t_1 \leftrightarrow t_2)$$

### b) 2. Wick's Theorem

Zerlegung v. Fermion Korrelation erfolgt analog  
zu bosonischer Formel, aber: f. jede Paarvertauschung  
der Fermionen  $a^+, a$  wird ein "-" aufgenommen

### Beispiel

$$\begin{aligned} &\langle T a_3 a_1^+ a_2 a_4^+ \rangle \\ &= \langle T a_3 a_1^+ \rangle \langle T a_2 a_4^+ \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle T a_3 a_2 \rangle \langle T a_1^\dagger a_4^\dagger \rangle \rightarrow 0 \\
&+ \langle T a_3 a_4^\dagger \rangle \langle T a_1^\dagger a_2 \rangle \\
&= \overset{\leftarrow}{G}_{u_3 u_1}(t_3 - t_1) \overset{\leftarrow}{G}_{u_2 u_4}(t_2 - t_4) + \dots
\end{aligned}$$

zeitliche Korrelation

$$\langle T a_1^\dagger(t_1) a_2(t_1) \rangle = \delta_{u_1 u_2}$$

### 3.2.4. Fermionen und Bosone simultan geordnet

$$\begin{aligned}
&\langle T a_1^\dagger a_2 a_3 \dots \phi_\alpha a_4 \phi_\beta \dots \rangle = ? \\
&= \langle T a_1^\dagger a_2 a_3 a_4 \dots \rangle \langle T \phi_\alpha \phi_\beta \dots \rangle
\end{aligned}$$

(3. Wicktheorem)

### 4. Vorstufe zur Diagrammanalyse: IBM

$$\langle \hat{q} \hat{r} \rangle \propto \left\langle \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-i)^u}{u!} T \int dt_1 \dots \int dt_u \phi(t_1) \dots \phi(t_u) \right\rangle$$

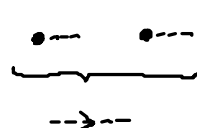
$$\phi = \sum_{\alpha} g_{\alpha} (b_{\alpha}^{\dagger} + b_{\alpha})$$

### 4.1. Analyse und Aufsummierung d. Reihe

1. Feststellung: nur Terme mit geradzähligen  $\phi$  hängen bei

$$\text{Reihe} = \text{sp}_{pc} \left( \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2u}}{(2u)!} \int dt_1 \dots \int dt_{2u} \tau \left( \phi(t_1) \dots \phi(t_{2u}) \right) \right)$$

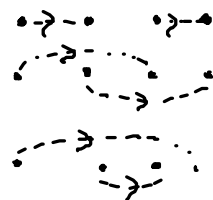
$$u=0 \rightarrow 1$$

$$u=1 \rightarrow \frac{(-i)^2}{2!} \langle \tau \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle = \frac{(-i)^2}{2!} (\dots)$$


$$u=2 \rightarrow \frac{(-i)^4}{4!} \langle \tau \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle =$$

$$= \frac{(-i)^4}{4!} \langle \tau \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \rangle$$

$$= \frac{(-i)^4}{4!}$$





$$= (-i)^k \frac{1}{k!} 3 \cdot (-\dots)^2 = (-i)^k \frac{1}{2!} \left( \frac{-\dots}{2} \right)^2$$

$u=3 \rightarrow$

Vorfaktor

$$= (-i)^6 \frac{1}{6!} \cdot 15 (-\dots)^3$$

$$5 = 6-1 \text{ Mgl. f. 1.}$$

$$3 = 6-3 \text{ Mgl. f. 3.}$$

$$1 = 6-5 \text{ Mgl. f. 2.}$$

$$= (-i)^6 \frac{1}{3!} \left( \frac{-\dots}{2} \right)^3$$

$u$  beliebig

$$(-i)^{2u} \frac{1}{(2u)!} \underbrace{\langle T \phi_1 \dots \phi_u \rangle}$$

$$\underbrace{(2u-1) \cdot (2u-3) \cdot (2u-5) \dots 3 \cdot 1 (-\dots)}$$

$$\frac{(2u)!}{u! 2^u}$$



$$= \frac{(-1)^4}{4!} \left( \frac{-\vec{p}}{2} \right)^4 \rightarrow \text{Exp. - Reihe}$$

$$\langle \vec{q} \vec{r} \rangle = \vec{d}_{cv} \vec{v}_{cv}(0) e^{-i\omega_{cv} t} e^{-\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \int_{t_1}^{t_2} D(\tau_1 - \tau_2) dt_1 dt_2}$$

Dipoloszillator ist komplett d. Photon freisprechbar bekannt

## 4.2. Diskussion d. Modell analytischer Boson (IBH)

$$\langle \vec{q} \vec{r} \rangle = \vec{v}_{cv}(0) e^{-i\omega_{cv} t} \exp \left( i \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}} t - \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} (1+u_{\alpha}) (1-e^{-i\omega_{\alpha} t}) + \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} u_{\alpha} (1-e^{i\omega_{\alpha} t}) \right)$$

Startwert d. optisch Feld      freie Bewegg.      Frequenzverschiebg. d. Dipols      (Reorganisationsenergie)

↓      ↓      ↓  
 photon emission      photon absorption

falls  $e^{i\omega_{\alpha} t}$  in die Reihe enthalten wird s.

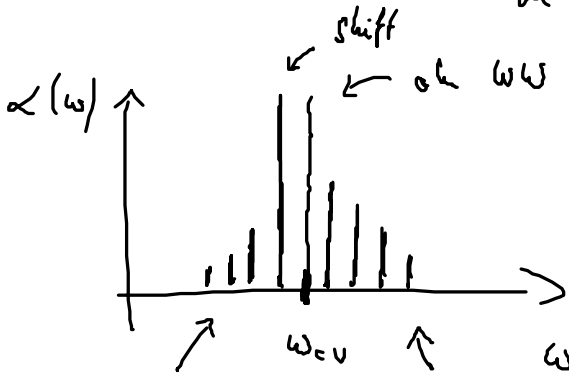
line Mode

$$\langle \hat{q} \hat{r} \rangle \propto \sum_m \frac{1}{m!} \dots e^{-i m \omega_0 t}$$

$$-i m \omega_0 t$$

$$\int \alpha = 0 \quad (\text{line Mode})$$

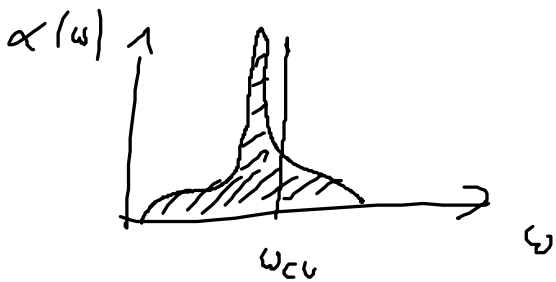
Vielzahl photon-prozesse



Photon absorption  $(n_x)$

Photon emission  $(1+n_x)$

viele Mode



Zeitverlauf

