

## 5. Die grammentwicklung des von Neumann reiler

Anwendung von  $\langle T e^{\int_{t'}^t v(t'') dt''} \rangle$  auf

- Schrödingergleichg. im WW-Bild
- Erwartungswerte im Heisenbergbild
- Zustandsummen in statistischer Physik (imaginäre Zeit  $\hat{=} T$ ) ...
- Vakuumamplitude  $R(t, t')$  als konkretes Bsp.

$$R(t, t') = \langle \phi_0 | \underbrace{U_W(t, t')}_{\text{Zeitentwicklungsoperator im WW-Bild}} | \phi_0 \rangle$$

nicht-WW  
Grundzustand

Zeitentwicklungsoperator im WW-Bild

$$U_W(t, t') = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V(t'') dt''}$$

$V(t'')$  ist WW im WW-Bild

$R(t, t')$  heißt Vakuumamplitude und bestimmt WW induzierte GZ-Energie

$$E_U - E_0 = i \hbar \frac{d}{dt} \ln (R(t, t')) \Big|_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)}$$

↑ Grundzustandsenergie mit WW  
 Grundzustandsenergie ohne WW

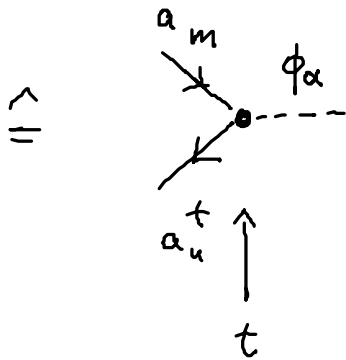
Beweis in Biederer

### 5.1. Grundzustands Diagramm bausteine

a) Darstellg. der Wechselwirkung  $V(t)$

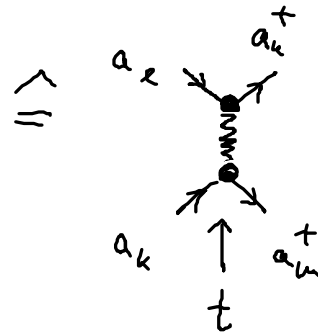
Elektron - Photon - WW

$$V(t) = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}(t) \phi_{\alpha}(t)$$



Elektron - Elektron - WW

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mu, \nu \\ \kappa, \lambda}} V_{\mu\nu\kappa\lambda} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\kappa} a_{\lambda}$$



b) Bausteine der Reihe

Phonon :  $D_{u_1 u_2}^{u_1 u_2} (t_1 - t_2) \equiv \langle T \phi_1 \phi_2 \rangle$

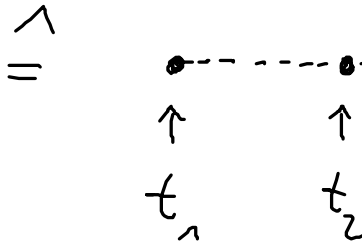
propyter :

$$= \text{Sp} \left( \rho e^{\sum_{\alpha} g_{\alpha}^{u_1 u_1} (b_{\alpha}(t_1) + b_{\alpha}^{\dagger}(t_1))} \sum_{\alpha'} g_{\alpha'}^{u_2 u_2} (b_{\alpha'}(t_2) + b_{\alpha'}^{\dagger}(t_2)) \right)$$

$$= \sum_{\alpha} g_{u_1 u_1}^{\alpha} g_{u_2 u_2}^{\alpha} \left( u_{\alpha} e^{i\omega_{\alpha} |t_1 - t_2|} + (1 + u_{\alpha}) e^{-i\omega_{\alpha} |t_1 - t_2|} \right)$$

Resonanzfall in  
 $\alpha$  bei  $t=0$

$\omega_{\alpha}$  - Phon frequenz  
 Hoch  $\alpha$

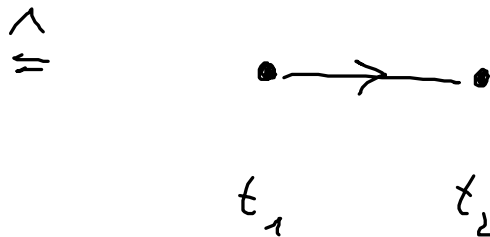


Elektron propagator :  $\vec{G}_{n_1 n_2}^{+} (t_1 - t_2) = \langle T a_{n_1}^{\dagger}(t_1) a_{n_2}(t_2) \rangle$

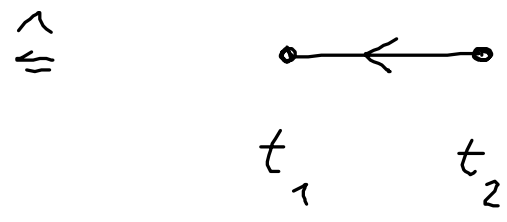
[Maunder:  $\swarrow$  durch Umdef. d. Zeitordnungsoper.]

$$= \left( \theta(t_1 - t_2) f_{n_1} + \theta(t_2 - t_1) (1 - f_{n_1}) \right) \delta_{n_1 n_2} e^{i\omega_{n_1} (t_1 - t_2)}$$

Bew. d. Sllk  
 bei  $t=0$



$$\overleftarrow{G}_{u_1 u_2}(t_1 - t_2) = \langle T a_{u_1}(t_1) a_{u_2}^\dagger(t_2) \rangle = \overrightarrow{G}_{u_1 u_2}(t_2 - t_1)$$



Maandiel:  $\overrightarrow{G}_{u_1 u_2}(t_1 - t_2) \Big|_{t_1 = t_2} = \overrightarrow{G}_{u_1 u_2}(0) = \rho_{u_1} \delta_{u_1 u_2}$

c) Idee: Term in der Störreihe sehen aus wie  $\langle T \overbrace{a^\dagger \dots \phi}^{V(t)} \rangle$   
 Diagramm ableiten lösen und ev. summieren, dazu Wick-Theorem  
 Diagramm ableiten verwenden

$$\langle T e^{\int_0^t dt' \dots} \rangle = \sum_{u=0}^{\infty} W_u(t) = 1 + W_1 \dots$$

Elektron-Photon WW:  $W_1 = \langle T \int_0^t dt_1 V(t_1) \rangle = \int_0^t dt_1 \sum_{u, \alpha} \langle g_{u\alpha}^\leftarrow \phi_\alpha \rangle \langle a_u^\dagger a_u \rangle$   
 (Note:  $\langle g_{u\alpha}^\leftarrow \phi_\alpha \rangle$  is labeled "bei  $t_1$ " and  $\langle a_u^\dagger a_u \rangle$  is labeled "Sp( $\rho_{el} \rho_{ph} \dots$ )")

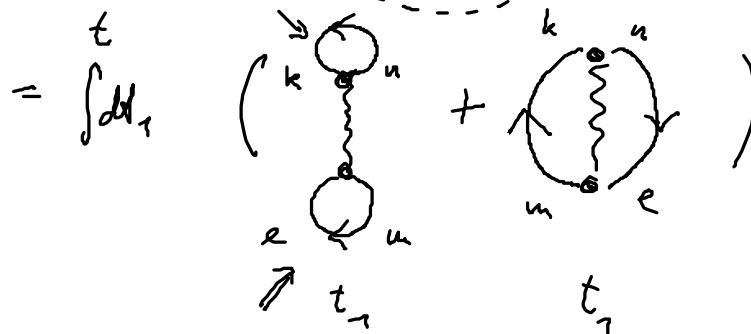
Photon:  $\langle \dots \rangle$

$= 0$

$= 0$  graphisch fällt zweite Linie zu beiden  
reduziert ist orthogonal  $\rightarrow 0$

Elektron - Elektron WW  $W_1 = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t dt_1 \langle T V(t_1) \rangle$

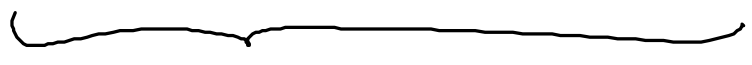
$$= \frac{1}{2} \int dt_1 \sum_{u, m, e, k} V_{u m e k} \langle T a_u^\dagger(t_1) a_m^\dagger(t_1) a_e(t_1) a_k(t_1) \rangle$$



$$= \sum_{u, m, e, k} -\frac{i}{\hbar} \cdot \hbar \left( \int_u \delta_{uk} \int_m \delta_{me} - \int_k \delta_{ku} \int_e \delta_{ek} \right) \cdot \frac{1}{2} V_{u m e k}$$

$$\Delta E = i\hbar \frac{d}{dt} \ln (1 + W_1) \Big|_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} = \frac{d}{dt} W_1$$

$$= \sum_{u, u', k} \frac{1}{2} v_{u, u', k} (\int_u \delta_{u, u'} \int_{u'} \delta_{u', u} - \int_u \delta_{u, u'} \int_{u'} \delta_{u', u})$$



Hasse-Feld Nütz.

5.2. Elektron-Phonon-WW als effektive El-El WW

$$V(t) = \sum g_{u, u'}^{\alpha} \phi_{\alpha} a_u^{\dagger} a_{u'}$$

$$D(t_1 - t_2)$$

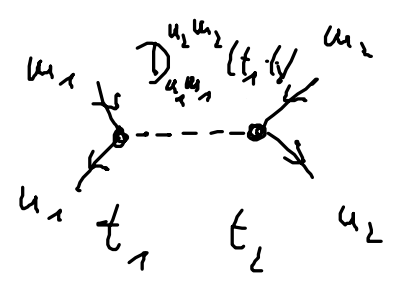
$$\langle T V_1 V_2 V_3 \dots \rangle = \sum_{\{u_i, u'_i\}} \langle T \sum_{\{\alpha_i\}} g_{u_1, u'_1}^{\alpha_1} \dots g_{u_n, u'_n}^{\alpha_n} \phi_{\alpha_1} \phi_{\alpha_2} \dots \phi_{\alpha_n} \rangle$$

↑ ↑  
t<sub>1</sub> t<sub>2</sub>

$$\langle T a_{u_1}^{\dagger} a_{u'_1} a_{u_2}^{\dagger} a_{u'_2} \dots a_{u_n}^{\dagger} a_{u'_n} \rangle$$

dies geschieht Kombination v.  $\langle T \phi \phi \rangle$  und  $a^{\dagger} a^{\dagger} a a$

kan man El-Ph als :

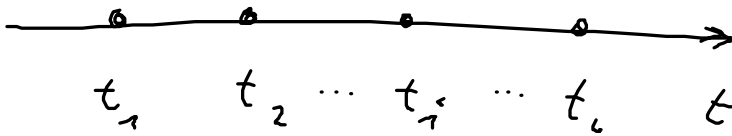


→ ähnlich Rephr wie f El-El-WW

### 5.3. Feynman repr. f. diagrammatische Analyse

#### a) Neumann Reihe $\rightarrow$ Diagramm

1.) Zeitachsen von links nach rechts gezeichnet



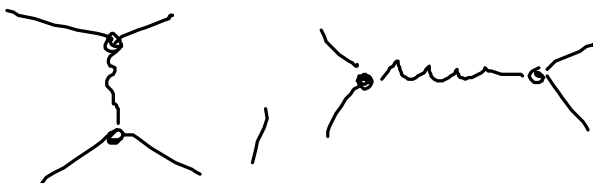
" $\bullet$ " heißt Vertex

2.)  $\vec{G}, \overleftarrow{G}$  werden durch Pfeile zwischen den Zeitpunkten repräsentiert

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bullet \\ u_1 \\ t_1 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \bullet \\ u_2 \\ t_2 \end{array} & \hat{=} & \vec{G}_{u_1 u_2}(t_1, t_2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bullet \\ u_2 \\ t_1 \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ u_1 \\ t_1 \end{array} & \hat{=} & G_{u_1 u_2}(0) = \int_{t_1}^{t_2} \delta_{u_1 u_2}
 \end{array}$$

3.) Wechselwirkung mit den Selbsterwartungswerten



Coulomb

El-Photon

die Vertices sind End- und Anfangspunkte  
der Propagator  $G$ .

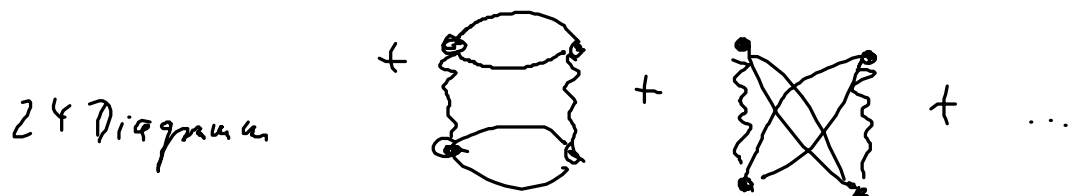
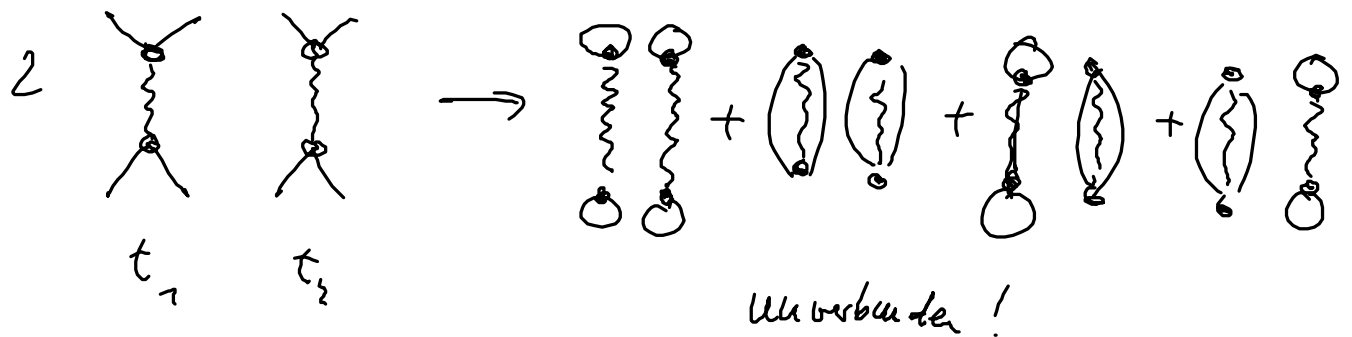
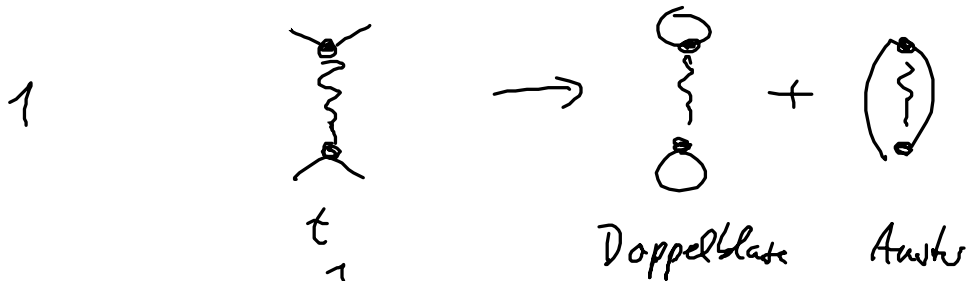
b) WW-Diagramme  $\rightarrow$  nicht zerlegte Diagramme

1.)  $n$ -Kreuzwirkungen zeichnen f.  $n$ -te Ordnung.

2.) alle mögl. Verbindungen (Kontraktionen) ausrechnen  
und die mögl. Diagramme zeichnen

Ordnung

0 keine WW





$n \hat{=} 2n!$  Diagramme

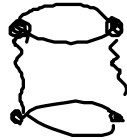
Sieht nicht  
einfach aus!

$n = 3$  720 Diagramme

### c/ Vereinfachungen

- bestimmte physikalische Prozesse ausschließen: z.B. Elektronengas:

Ringdiagramm



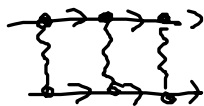
→ f. keine Elektronendichte

Blasen diagramm



→ verschwindet gep (0a-10a WW)

Leitendiagramm



→ f. kleine Elektronendichte

- Theorem d. verbundenen Diagramme

Liebed Clustertheorem

$$\langle \phi_0 | U_w | \phi_0 \rangle = \exp \left( \underbrace{\langle \phi_0 | U_w | \phi_0 \rangle}_{\text{alle verbunden Diagramme}} \right)$$

Bsp. independ. Boson Modell

$n=1$   $V = \bullet \text{---} \rightarrow 0$

$\alpha$

$$u=2 \quad VV = \underbrace{\bullet \cdots \bullet} \rightarrow \neq 0 \quad \begin{array}{l} \text{Lichte} \\ \text{verbundene Diagramme} \end{array}$$

$$\rightarrow \bullet \cdots \bullet$$

$$\cong \langle \tau \phi_1 \phi_2 \rangle$$

$$u=3 \quad VVV \rightarrow 0$$

$$u=4 \quad VVVV \rightarrow 0$$

man kann kein verbundenes Diagramm in höherer Ordnung konstruieren

$$\langle \phi_0 | U_\omega | \phi_0 \rangle = e^{\langle \tau \phi_1 \phi_2 \rangle}$$

- man kann Zahl der verbundenen Diagramme weiter einschränken!

es gibt Diagramme die denselben Wert begeben bei Rückübersetzung  $\hat{=}$  "topologisch äquivalent"

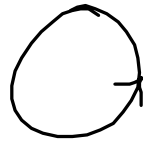


folgt aus Symplicien der Coalgebra  $\omega$

d) Übersicht Diagramme  $\rightarrow$  Formeln

1/ über alle Vertices indizes ist zu summieren  $\rightarrow \sum$   
 und über alle Zeitpunkte zu integrieren  $\rightarrow \int dt_i$

2/ jedes Diagramm wird mit Vorfaktor  $(-1)^L$  versehen  
 wobei  $L$  die Zahl geschlossener Fermi-Linien ist

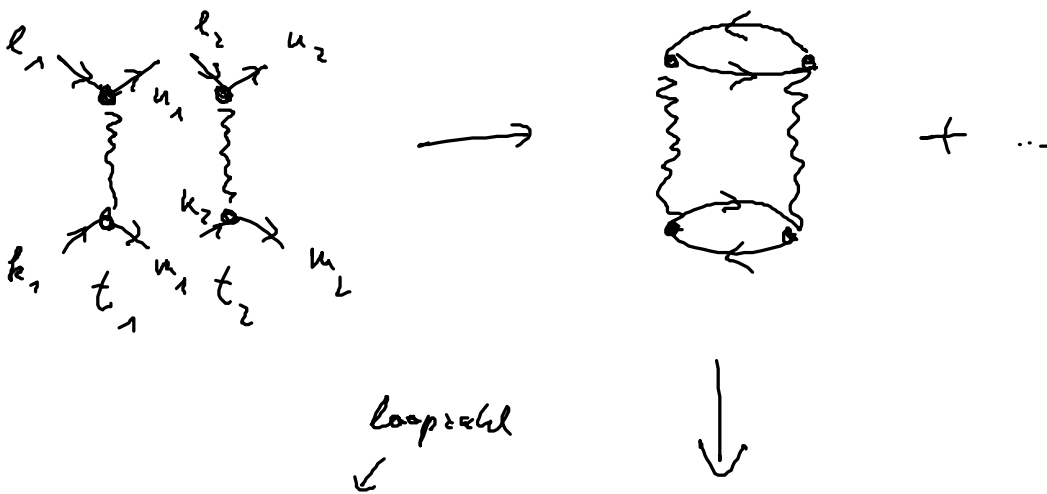


3/ Vorfaktor  $\frac{1}{4!}$  und  $\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^4$  oder  $\left(\frac{1}{2}\right)$

4/ alle Linien  $\circ \rightarrow \circ$  und  $\overrightarrow{G}$  ersetzen  
 $t_i \quad t_{i+1}$

und die Matrix  $V_{ij}$  und die Indizes aufschreiben

Bsp: Werte  $W_2$  berechnen



$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \frac{(-1)^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ i t \end{pmatrix}^2 \sum_{\{u, v\}} V_{u_1 u_2 k_1 l_1} V_{u_2 u_2 k_2 l_2}$$

↗  
 $\text{var } V$

$$\cdot \overleftarrow{G}_{l_1 u_2}(t_1 - t_2) \overrightarrow{G}_{u_1 l_2}(t_1 - t_2)$$

$$\cdot \overrightarrow{G}_{u_1 k_2}(t_1 - t_2) \overleftarrow{G}_{k_1 u_2}(t_1 - t_2)$$

— Reformulation:

$$= \text{Cylinder} \left( 1 + \text{Cylinder with vertex on top and wavy line} + \text{Cylinder with vertex on top and wavy line and loop} + \dots \right)$$

$$= \text{Cylinder} \left( \frac{1}{1 - \text{Cylinder with vertex on top and wavy line}} \right)$$

