English Summary:

1. Newtonian Mechanics :

Motion of mass points under the influence of forces

$\Updownarrow$

rigid bodies

1.1. Kinematics :

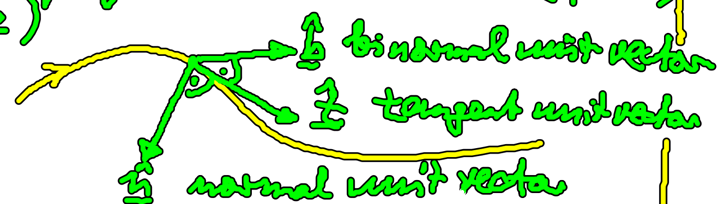
position vector $\underline{r}(t) \in \mathbb{R}^3$

velocity vector $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}$

acceleration vector $\underline{a}(t) = \ddot{\underline{r}}$

a) Cartesian coordinates $\underline{r}(t) = \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\, \underline{e}_j$ (basis vectors)

b) Natural coordinates : accompanying orthonormal basis (frame)
(curvilinear coord.) $(\hat{\underline{t}}, \hat{\underline{n}}, \hat{\underline{b}})$



parametrization of trajectory
$\underline{r}(t)$ by arclength $s(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\underline{t}} &= \frac{d\underline{r}}{ds} \\ \hat{\underline{n}} &= \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{\underline{t}}}{ds} \\ \hat{\underline{b}} &= \hat{\underline{t}} \times \hat{\underline{n}} \end{aligned}}$$

curvature $\kappa = \left|\frac{d\hat{\underline{t}}}{ds}\right|$, curvature radius $\tilde{\rho} = \frac{1}{\kappa}$

$$\underline{v} = v\hat{\underline{t}}$$

$$\underline{a} = \underbrace{\dot{v}\hat{\underline{t}}}_{\text{tangential}} + \underbrace{\kappa v^2 \hat{\underline{n}}}_{\text{normal accel.}}$$

1.2 Newton'sche Axiome

Bisher : Kinematik

Jetzt : Dynamik (Kräfte als Ursache der Bewegung)

Struktur der Theorie (hier: Mechanik eines Massenpunktes)

Definitionen

Basisdefinition → z.B. Ort, Zeit, Masse (durch Messvorschrift)

Folgedefinitionen → z.B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls

Sätze

Axiome (Grunderfahrungstatsachen) z.B. Newton'sche Axiome

Folgerungen: mathematisch beweisbar aus $\underbrace{\text{Basisdef.} + \text{Axiomen}}_{\text{Postulate der Theorie}}$

Grundgesetze der Dynamik:

2 neue Begriffe: Kraft (nur durch Wirkung definierbar)

(träge) Masse

1. Newton'sches Axiom (Trägheitsgesetz):

Es gibt Koordinatensysteme (= Inertialsysteme), in denen ein kräftefreier Massenpunkt im Zustand der Ruhe oder geradlinig-gleichförmigen Bewegung verharrt:

$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t$

Gegenbeispiel: frei fallender Aufzug, Karussell

Postulat (Basisdef.): Jeder Körper besitzt eine skalare Eigenschaft „träge Masse m", $m > 0$.

Definition: Impuls $\underline{p} := m\underline{v}$

2. Newton'sches Axiom (Bewegungsgesetz)

Kraft $\boxed{\underline{F} = \dot{\underline{p}} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})}$

(gilt in Inertialsystemen)

Bemerkungen

(i) Falls m nicht zeitabhängig, gilt $\boxed{\underline{F} = m\ddot{\underline{r}} = m\underline{a}}$
dynam. Grundgl.

$$\text{Diff.gl.} \xrightarrow{\text{Lösung}} \text{Bahnkurve } \underline{r}(t)$$

Grundaufgabe der klass. Mechanik:

- Aufstellung der Bew.gl.
- Lösung der Diff.gl.
- Physikal. Interpretation der Lösung

(ii) Relativist. Mechanik : $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

m_0 Ruhmasse
c Lichtgeschw.

(geschwindigkeitsabh., somit zeitabh.)

$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$ bleibt gültig

$v \ll c$: $m \approx m_0$ klass. Grenzfall

(iii) zeitliche Änderung der Masse auch in der nichtrel. Mech. möglich, z.B. Rakete

(iii) Nur das Verhältnis $\frac{F}{m}$ ist durch das Axiom 2 definiert, Absolute Festlegung der Kraft durch willkürliche Wahl einer Einheit, z.B.
Einheit von m : 1 kg (Basisdef.)
$\Rightarrow$ Einheit von F : $1\,N = 1\,\frac{kg\,m}{s^2}$ (Newton)

$(\underline{F} = m\ddot{\underline{r}})$

–

Basiseinheiten
$$\left.\begin{aligned}[r] &= m\\ [m] &= kg\\ [t] &= s\end{aligned}\right\}\ \text{MKS-Einheiten}$$

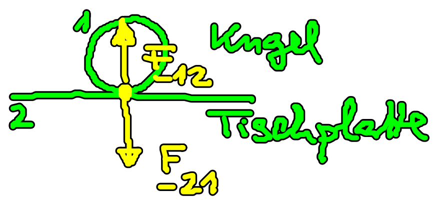
alternativ:
$$\left.\begin{aligned}&cm\\ &g\\ &s\end{aligned}\right\}\ \text{cgs-Einheiten}$$

3. Newton'sches Axiom (actio – reactio)

Sei $\underline{F}_{12}$ Kraft des Körpers 2 auf Körper 1,
$\underline{F}_{21}$ " " " 1 " " 2.

Dann: $\boxed{\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}}$

Beispiel



Auflagedruck der Kugel: $\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$

Anwendung: Messung der trägen Masse

nach Durchtrennen der Feder: $m_1 \underline{a}_1 = -m_2 \underline{a}_2$
unabh. von $\underline{F}$!

4. Newton'sches Axiom (Superpositionsprinzip der Kräfte)

ungestörte Überlagerung von Kräften auf einen Massenpkt.: $\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$

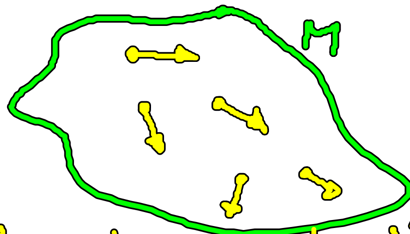
Anwendung: Kräfte durch Vektoren darstellbar
(Vektorrechnung, lin. Vektorraum)

Darstellung von Kräften durch Kraftfelder $\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)$

Allg. Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

math. Schreibweise $\underline{A}: M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\underline{r} \mapsto \underline{A}(\underline{r})$

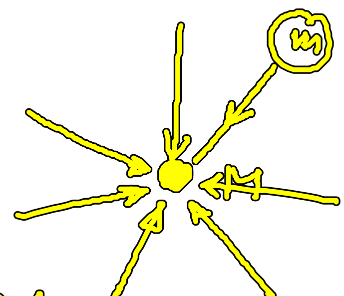


z. B. Gravitationskraft $\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$

(γ Gravitationskonstante)

Darstellung durch Gravitationsfeld

$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r^3}\underline{r}$ Zentralfeld



Kraft, die die Masse M am Ort $\underline{r}_M=0$ auf beliebige Masse m am Ort $\underline{r}$ ausübt

Bem.:

(i) Kraftfelder erlauben Fernwirkungskräfte

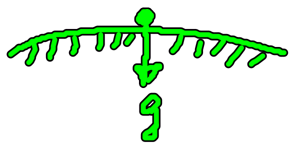
(ii) Kraft kann auch von $\dot{\underline{r}}$ abhängen, z.B. Lorentzkraft auf ein im Magnetfeld bewegtes geladenes Teilchen $\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}}) = q\,\dot{\underline{r}}\times\underline{B}(\underline{r},t)$ magn. Induktion

oder Reibungskraft $\underline{F} = -\alpha\underline{v}$

Äquivalenz von träge und schwere Masse

Gravitationskraft der Erde auf der Erdoberfläche:

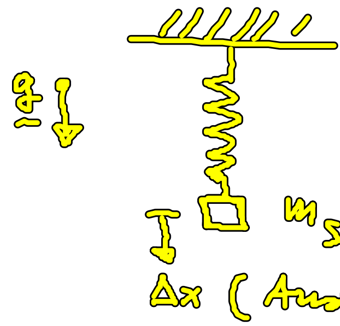
$\underline{F} = m_s \underline{g}$ (Schwerkraft, Gewichtskraft)



$\underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ $\quad g = 9.81 \frac{m}{s^2} \approx$ const.

Erdbeschleunigung

m_s = schwere Masse (Materialeigenschaft, messbar durch Federwaage)



Exp. Grunderfahrung:

$m_s \sim m$ (träge Masse) für alle Körper

(m : Beschleunigung $\underline{F} = m\underline{a}$ beim freien Fall im Schwerefeld)

m_s : Gewichtskraft $\underline{F} = m_s \underline{g}$

Setze daher $\boxed{m_s = m \text{ (träge)}}$

(Einsteins Äquivalenzprinzip)

→ Grundlage der allg. Relativitätstheorie