English Summary :

1.2 Newton's Laws of Dynamics

- First Law (Principle of inertia): In inertial systems without force ~ no motion or constant velocity
- Second Law (Newton's Law) : $\underline{F} = \dot{\underline{p}}$
  (momentum $\underline{p} = m\underline{v}$, inertial mass m)
- Third Law : action equals reaction
- Fourth Law : superposition principle of forces

vector field of force $\underline{F}(\underline{r}, t)$ e.g. gravity field $\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma \frac{M m_s}{r^3} \underline{r}$

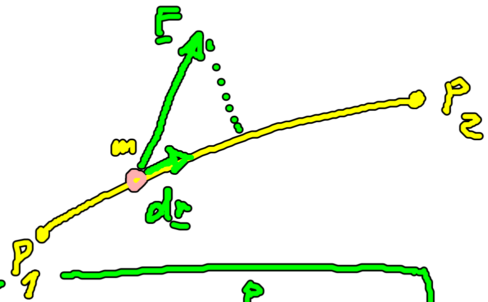
equivalence of inertial and gravitational (heavy) mass : $m = m_s$

acceleration $\underline{F} = m\underline{a}$ gravity force $\underline{F} = m_s \underline{g}$

1.3 Arbeit und konservative Kräfte

geg. : Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r}, t)$

Arbeit bei infinitesimaler Verschiebung eines Massenpunktes um $d\underline{r}$ im Kraftfeld $\underline{F}$:



$\delta W = -\underline{F}\cdot d\underline{r} \quad > 0$, falls Verschiebung **gegen** die Kraft (Arbeit von außen geleistet)

< 0, falls Verschiebung **mit** der Kraft (Massenpkt. verrichtet selbst Arbeit)

$$\boxed{W_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}}$$

ist i.a. abhängig von $\underline{F}(\underline{r})$
P_1, P_2
Weg C
zeitl. Verlauf $\underline{r}(t)$

Linienintegral

(Auswertung durch Parametrisierung der Bahnkurve, s. Math. Meth.)

Leistung

$$\boxed{P := \frac{dW}{dt}} = -\frac{d}{dt}\int_0^t \underline{F}\,\underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt'}}_{\text{Parametrisierung der Bahnkurve } \underline{r}(t)}\,dt' = -\underline{F}\cdot\dot{\underline{r}}$$

Dim.: $[P] = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} = W$

Def.: Eine Kraft $\underline{F}$ heißt **konservativ**, falls für bel., feste P_1, P_2 die Arbeit $-\int_{P_1}^{P_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$ nicht vom Weg abhängt.

Satz: Dann existiert eine skalare Fkt. $V(\underline{r})$, das **Potential** der Kraft $\underline{F}$, mit

$$\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = -\underbrace{\text{grad}}_{\text{Gradient}}\, V(\underline{r})} \equiv -\underline{\nabla} V(\underline{r})$$

Nabla-Op. $\underline{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}$, wirkt auf skalaren Feldern

Es gilt: $\frac{d}{dt}V(\underline{r}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$

$$= \underline{\nabla} V \cdot \underline{\dot{r}}$$

$$= -\underline{F} \cdot \underline{\dot{r}} = P = \frac{dW}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{21} \equiv -\int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)}$$

d.h. geleistete Arbeit hängt nur von $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ und nicht vom Weg ab.

<u>Weitere Kriterien für konservative Kräfte:</u>

Sei $V(\underline{r})$ 2x stetig diff.bar. Dann gilt

$$\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}}_{-\frac{\partial}{\partial x_i} F_j} = \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}}_{-\frac{\partial}{\partial x_j} F_i} \qquad i,j = 1,2,3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} F_j - \frac{\partial}{\partial x_j} F_i = 0$$

<u>Def.</u>: $\text{rot}\, \underline{F}(\underline{r}) \equiv \underline{\nabla} \times \underline{F}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

<u>Rotation</u> (Wirbelfeld) des Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$

Also: $\underline{F} = -\text{grad}\, V \Rightarrow \boxed{\text{rot}\, \underline{F} = 0}$

da $\text{rot}(\text{grad}\, V) \equiv 0 = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} V)$

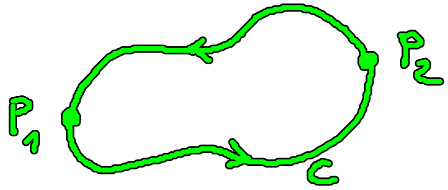
<u>Weiteres Kriterium:</u>

Linienintegral über geschlossenen Weg C:

$$-\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \oint_C \underline{\nabla} V \cdot d\underline{r} = \oint_C \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} dx_3 \right) = \oint_C dV$$

$$= V_{\text{Ende}} - V_{\text{Anfang}} = 0$$

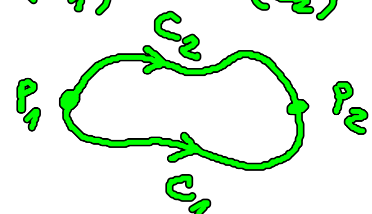
Eine konservative Kraft leistet auf einem geschlossenen Weg keine Arbeit.



Zerlegung des geschlossenen Wegs in $\int_{P_1}^{P_2} + \int_{P_2}^{P_1}$:

$$0 = \oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{P_1}^{P_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{P_2}^{P_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \underset{(C_1)}{\int_{P_1}^{P_2}} \underline{F}\cdot d\underline{r} - \underset{(C_2)}{\int_{P_1}^{P_2}} \underline{F}\cdot d\underline{r}$$

Arbeit wegunabhängig!



<u>Satz</u> : Folgende Kriterien sind äquivalent für konservative Kräfte $\underline{F}(\underline{r})$:

(i) $\underline{F} = -\,\mathrm{grad}\, V(\underline{r})$ (Ex. eines Pot. V)

$\Updownarrow$

(ii) $\mathrm{rot}\, \underline{F} = 0$

$\Updownarrow$

(iii) $\oint \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$ (Arbeit verschwindet für alle geschlossenen Wege)

$\Updownarrow$

(iv) $W_{21} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}$ wegunabhängig

Beweis : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i)

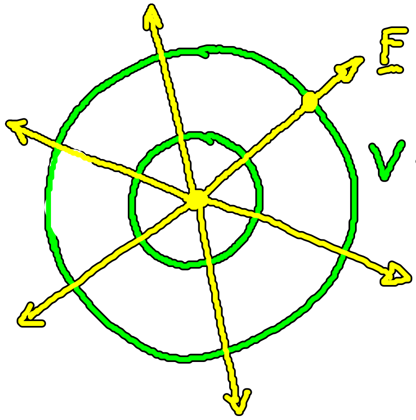
<u>Beispiel</u> für konservative Kräfte : Gravitationskraft

Gravitationspot. $V = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ (zeigen!)

Beispiel für nichtkonservative (<u>dissipative</u>) Kräfte :

Reibungskraft $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) \sim \alpha \dot{\underline{r}}$

<u>Äquipotenzialflächen</u> : $V(\underline{r}) = \mathrm{const.}$



$\underline{F} = -\text{grad}\, V \quad \parallel$ Feldlinien

$V = \text{const.}$

$\underline{F} \perp$ Äquipotenzialflächen

Allg. gilt für ein skalares Feld $V(\underline{r})$:

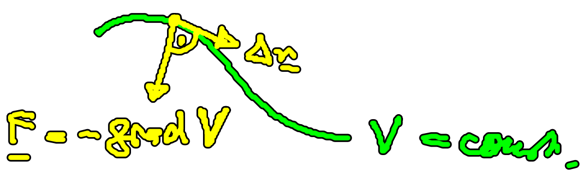
$\text{grad}\, V \perp$ Äquipotenzialflächen $V(\underline{r}) = \text{const.}$

<u>Beweis</u>: Feldänderung $\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\Delta x_3$

$$= \text{grad}\, V \cdot \Delta \underline{r}$$

Betrachte $\Delta \underline{r}$ so, dass $0 \overset{!}{=} \Delta V = \text{grad}\, V \cdot \Delta \underline{r}$

$$\Rightarrow \text{grad}\, V \perp \Delta r$$



$\square$

<u>Energieerhaltungssatz</u>

Für konservative Systeme existiert ein 1. Integral der Newton'schen Bewegungsgl.:

$$\underline{F} = m\ddot{\underline{r}} \quad \Big| \cdot \dot{\underline{r}}$$

$$\underbrace{\underline{F}\cdot\dot{\underline{r}}}_{-P} = m\ddot{\underline{r}}\cdot\dot{\underline{r}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\underbrace{W}_{V} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2\right)}_{T}$$

<u>potentielle Energie</u> (V) <u>kinetische Energie</u> (T)

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad T + V = const = E$ Energie des Massenpunktes

$$\boxed{\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + V(\underline{r}) = E}$$ Energieerhaltungssatz

Damit ist die Bewegungsgl. (Dgl. 2. Ordnung) auf eine Dgl. 1. Ordnung reduziert

$\Rightarrow$ 1. Integral (E = Integrationskonstante
= Bewegungskonstante
= Integral der Bewegung)

Für nichtkonservative Kräfte ist die (mechanische) Energie nicht erhalten: $\underline{F} = \underline{F}_{kons} + \underline{F}_{diss}$

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \underbrace{\underline{F}_{diss} \cdot \dot{\underline{r}}}_{-P_{diss}}$$

$-P_{diss}$ Leistung der dissipativen Kräfte