

English Summary:

1.4 Harmonic oscillations

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{damped linear oscillator}$$

inertia friction harmon. force

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{eigenfrequency}$$

$$Q = \frac{m\omega_0}{\beta} \quad \text{quality factor}$$

(k elast. constant, β damping)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \frac{\omega_0}{Q} y \end{cases}$$

dynamical system \Rightarrow trajectories $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, phase portrait

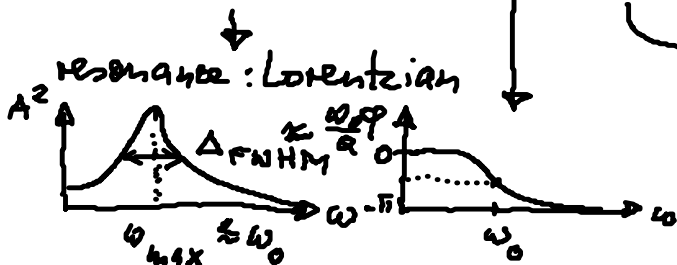
1.5 Forced oscillations

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = k_0 e^{i\omega t}$$

$$\text{ansatz } x(t) = x_0 e^{i\omega t} \in \mathbb{C}$$

$$x(t) = A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} + A_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t + \varphi_0\right)$$

transient (general solution of homogeneous eqn.)
satisfies initial conditions

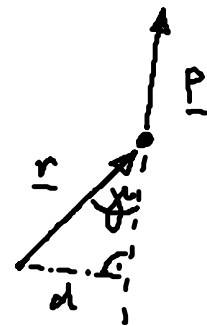


1.6 Zentralkraft und Drehimpulserhaltung

Def.: Drehimpuls $\underline{L} := \underline{r} \times \underline{p}$
bzgl. des Koordinatenursprung

$$|\underline{L}| = |\underline{r}| |\underline{p}| \sin \alpha = d p$$

$\underline{L} \perp \underline{r}, \underline{p}$ axialer Vektor



Beispiel: Kreisbewegung

$$\underline{L} = \underline{r} \times m \underline{\dot{r}} = m v r \underline{e}_3$$

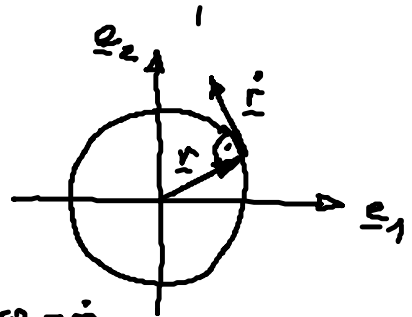
$\underline{L} \parallel$ Drehachse

$$|\underline{L}| = m v r = m \omega r^2$$

Winkelgeschw. $\omega = \dot{\varphi}$

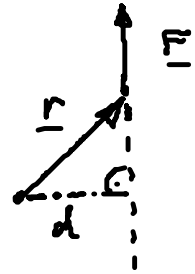
$$s = \varphi r, \quad \dot{s} = \dot{\varphi} r \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \omega r}$$



Def.: Drehmoment $\underline{M} := \underline{r} \times \underline{F}$
bzgl. des Koordinatenursprungs

$$|\underline{M}| = d \cdot F$$



Newton'sche Bewegungsgl.:

$$m \underline{\ddot{r}} = \underline{F}$$

$$\Rightarrow m (\underline{r} \times \underline{\ddot{r}}) = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{M}} \quad \text{Drehimpulssatz}$$

$$\boxed{\underline{M} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underline{L} = 0} \quad \text{d.h. } \underline{L} = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltungssatz

$\underline{M} = 0$ falls (i) $\underline{F} = 0$ (trivial)

oder (ii) $\underline{F} \parallel \underline{r}$ (Zentralkraft, Zentralfeld)

Satz: Für Zentralkräfte $\underline{F} = \tilde{f}(r, \dot{r}, t) \underline{e}_r$
gilt Drehimpulserhaltung.

NB: Zentralkräfte müssen nicht konservativ sein!

Satz: Konservative Zentralkräfte sind von der Form

$$\underline{F}(\underline{r}) = f(r) \underline{e}_r \quad \text{mit } r = |\underline{r}|$$

Beweis: Ansatz $\underline{F}(\underline{r}) = f(r) \underline{e}_r$
zu zeigen: $f(\underline{r}) = f(|\underline{r}|)$

konservative Kraft $\Leftrightarrow 0 = \text{rot } \underline{F} = \nabla_x \left(f(r) \frac{\underline{r}}{r} \right)$

$$= \frac{f(r)}{r} \nabla_x \underline{r} + \left(\nabla_x \frac{f(r)}{r} \right) \times \underline{r}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_0, \text{ da } \nabla_x \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$\Leftrightarrow 0 = \nabla_x \frac{f(r)}{r} \times \underline{r}$$

$$\Leftrightarrow \nabla_x \frac{f(r)}{r} \parallel \underline{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(r)}{r} = \text{const} \perp \underline{r}$$

$\stackrel{!}{=} \text{Kugelflächen } g(|\underline{r}|) = \text{const.}$

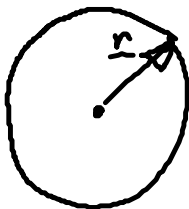
$$\Leftrightarrow f(\underline{r}) \stackrel{!}{=} f(|\underline{r}|)$$

Satz: Eine konservative Kraft ist Zentralkraft □

$$\Leftrightarrow V(\underline{r}) = V(|\underline{r}|)$$

d.h. Potenzial kugelsymmetrisch

Beweis: Sei \underline{F} konservativ.



$$(i) V(r) = V(|r|) \Rightarrow \underline{F} = -\underline{\nabla}V(r) = -\frac{dV}{dr} \underline{\nabla}_r$$

$$\text{Mit } \frac{\partial}{\partial x_i} r = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r},$$

$$\text{also } \underline{\nabla}_r = \frac{\underline{r}}{r} = \underline{e}_r, \text{ folgt } \underline{F} = -\underbrace{\frac{dV(r)}{dr}}_{f(r)} \underline{e}_r$$

$$(ii) \underline{F} = f(r)\underline{e}_r \Rightarrow -\underline{\nabla}V = f(r)\frac{\underline{r}}{r} \stackrel{\text{so.}}{=} f(r)\underline{\nabla}_r$$

Sei $g(r)$ eingeführt mit $\frac{dg(r)}{dr} = f(r)$

Dann

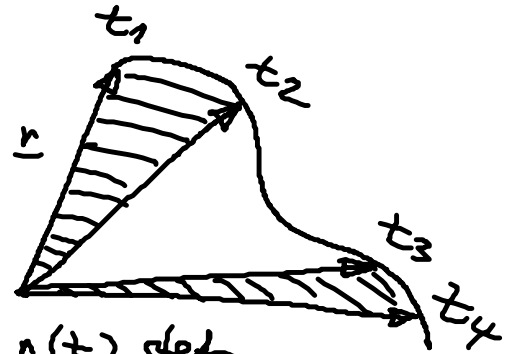
$$-\underline{\nabla}V = \frac{dg(r)}{dr} \underline{\nabla}_r = \underline{\nabla}g(r)$$

also kann $V = -g(r)$ nur von $r = |r|$ abhängen. \square

Für Zentralkräfte folgt aus der Drehimpulserhaltung
 $\underline{L} = \text{const}$ folgendes für die Bahn $\underline{r}(t)$:

Satz 1: Bewegung in einer Ebene $\perp \underline{L}$

Satz 2 (Flächensatz): Der Radiusvektor (Fahrstrahl) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.



Beweis:

(1) $\underline{L} = \text{const}$ (Richtung von \underline{L} fest)

\Rightarrow da $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \perp \underline{r}$, muss $\underline{r}(t)$ stets in einer Ebene $\perp \underline{L}$ liegen: $\underline{r} \cdot \underline{L} = 0$

(2) $|\underline{L}| = \text{const}$ (Betrag von \underline{L} fest)

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{2} |\underline{r}(t) \times d\underline{r}|$$

$$= \frac{1}{2} |\underline{r}(t) \times \dot{\underline{r}} dt|$$



$$= \frac{1}{2} dt |\underline{r} \times \underline{\dot{r}}|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\underline{L}| \quad \text{Flächengeschwindigkeit.} \quad \square$$

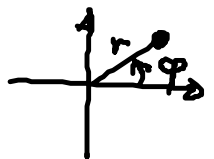
Integration der Bewegungsgl. für konserv. Zentralkräfte

Ausnutzung der 1. Integrale der Bewegung

$$\underline{L} = m(\underline{r} \times \underline{\dot{r}}) = \text{const.} \quad (\text{Drehimpulserhaltung})$$

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r) = \text{const.} \quad (\text{Energieerhaltung})$$

$\underline{L} = \text{const.} \Rightarrow$ ebene Bewegung (oBdA: x-y-Ebene)

Wähle ebene Polarkoord. $\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \end{cases}$ 

$$\underline{r} = r(t) \underline{e}_r(t)$$

$$\underline{\dot{r}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\dot{r}^2 = (\dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi) (\dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi) = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (*)$$

$$\text{da } \underline{e}_r \cdot \underline{e}_\varphi = 0$$

$$\left(\text{folgt auch direkt aus } \dot{r}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{r}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right)$$

$$\underline{L} = m \underline{r} \times \underline{\dot{r}} = m r \underline{e}_r \times (\dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi) = m r^2 \dot{\varphi} \underbrace{\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi}_{\underline{e}_3}$$

Damit lässt sich $\dot{\varphi}$ durch $L = m r^2 \dot{\varphi}$ ausdrücken: $(**)$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \Rightarrow \text{nur noch 1 Variable } r(t)$$

Energieerhaltungssatz:

$$(1) \quad E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r)$$

Dgl. 1. Ordnung für $r(t)$

zentrifugal-
potenzial

$V_{\text{eff}}(r)$ effektives Radialpotenzial

(quasi-eindimensional)

Integration von (1):

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 = E - V_{\text{eff}}(r)$$

$$\dot{r} = (\pm) \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}} = \int dt$$

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r'))}} = t - t_0 \quad \xrightarrow{\text{Umkehrung}} \quad r = r(t)$$

Berechnung von $\varphi = \varphi(t)$ aus Drehimpulserhaltungsatz:

$$L = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$d\varphi = \frac{L}{m r^2} dt = \frac{L}{m r^2} \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{L}{m r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}}$$

Integration:

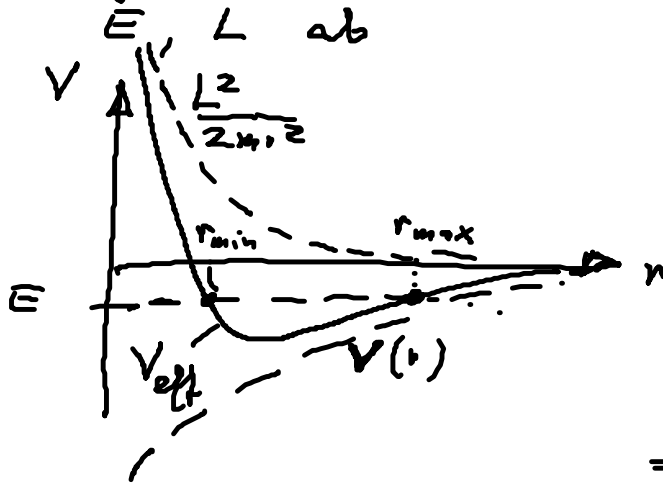
$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{L dr'}{r'^2 \sqrt{2m (E - V_{\text{eff}}(r'))}} \quad \xrightarrow{\text{Umkehrung}} \quad \boxed{r = r(\varphi)}$$

Bahn in Polarkoordinaten.

Einsetzen in $r = r(t) \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$

$$\text{Damit } \boxed{\underline{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}} \quad \text{Bahnkurve}$$

gestalt der Bahn hängt von den Integrationskonst.



Klass. erlaubte Bewegung:

$$E \geq V_{\text{eff}}(r)$$

Klass. verbotene Bewegung:

$$E < V_{\text{eff}}(r)$$

Klass. Umkehrpunkte

$$E = V_{\text{eff}}(r)$$

$$\Rightarrow r_{\text{min}} < r < r_{\text{max}}$$