English Summary:

1.4 Harmonic oscillations

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$ damped linear oscillator

inertia friction harmon. force

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ eigenfrequency

$Q = \frac{m\omega_0}{\beta}$ quality factor

(k elast. constant, β damping)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x - \frac{\omega_0}{Q} y \end{aligned}}$$

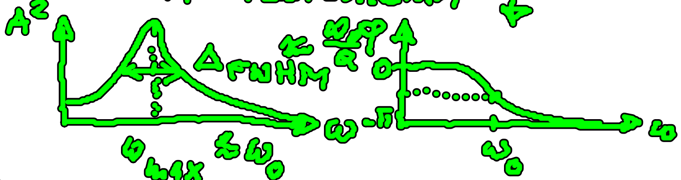
dynamical system $\Rightarrow$ trajectories $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, phase portrait

1.5 Forced oscillations

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = k_0 e^{i\omega t}}$$ ansatz $x(t) = x_0 e^{i\omega t} \in \mathbb{C}$

$$x(t) = A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} + \underbrace{A_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\, t + \varphi_0\right)}_{\text{transient (general solution of homogeneous equ.) satisfies initial conditions}}$$

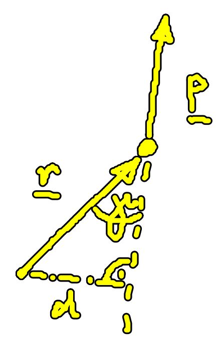
resonance: Lorentzian



1.6 Zentralkraft und Drehimpulserhaltung

Def.: Drehimpuls $\boxed{\underline{L} := \underline{r} \times \underline{p}}$

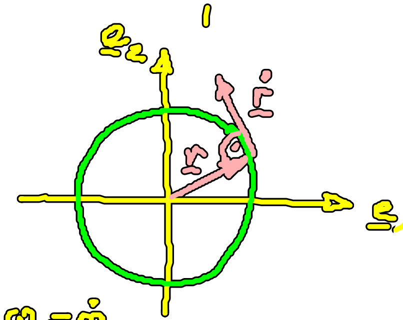
bzgl. des Koordinatenursprung



$|\underline{L}| = |\underline{r}|\,|\underline{p}| \sin\varphi = d\,p$

$\underline{L} \perp \underline{r}, \underline{p}$ axialer Vektor

Beispiel : Kreisbewegung



$\underline{L} = \underline{r} \times m\dot{\underline{r}} = mvr\,\underline{e}_3$

$\underline{L} \parallel$ Drehachse

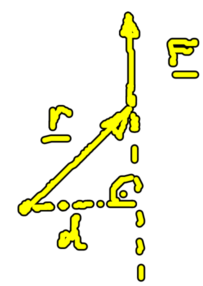
$|\underline{L}| = mvr = m\omega r^2$ Winkelgeschw.: $\omega = \dot{\varphi}$

$s = \varphi r$, $\dot{s} = \dot{\varphi} r \Rightarrow \boxed{v = \omega r}$

Def. : Drehmoment $\boxed{\underline{M} := \underline{r} \times \underline{F}}$

bzgl. des Koordinatenursprungs

$|\underline{M}| = d \cdot F$



Newton'sche Bewegungsgl. :

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

$$\Rightarrow m(\underline{r} \times \ddot{\underline{r}}) = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\underline{L} = \underline{M}}$$ Drehimpulssatz

$$\boxed{\underline{M} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underline{L} = 0}$$ d.h. $\underline{L}$ = const.

<u>Drehimpulserhaltungssatz</u>

$\underline{M} = 0$ falls (i) $\underline{F} = 0$ (trivial)

oder (ii) $\underline{F} \parallel \underline{r}$ (Zentralkraft, Zentralfeld)

Satz: Für Zentralkräfte $\underline{F} = f(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)\,\underline{r}$
gilt Drehimpulserhaltung.

NB: Zentralkräfte müssen nicht konservativ sein!

Satz: Konservative Zentralkräfte sind von der Form

$$\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = f(r)\,\underline{e}_r} \qquad \text{mit } r = |\underline{r}|$$

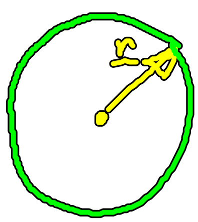
Beweis: Ansatz $\underline{F}(\underline{r}) = f(\underline{r})\,\underline{e}_r$

zu zeigen: $f(\underline{r}) \overset{!}{=} f(|\underline{r}|)$

konservative Kraft $\Leftrightarrow$ $0 \overset{!}{=} \operatorname{rot} \underline{F} = \underline{\nabla} \times \left(f(\underline{r}) \frac{\underline{r}}{r} \right)$

$$= \frac{f(\underline{r})}{r} \underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{r}}_{} + \left(\underline{\nabla} \frac{f(\underline{r})}{r} \right) \times \underline{r}$$

0, da $\underline{\nabla} \times \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$



$$\Leftrightarrow 0 = \underline{\nabla} \frac{f(\underline{r})}{r} \times \underline{r}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\nabla} \frac{f(\underline{r})}{r} \parallel \underline{r}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{f(\underline{r})}{r} = \text{const} \perp \underline{r}}_{\overset{!}{=} \text{ Kugelflächen } g(|\underline{r}|) = \text{const.}}$$

$$\Leftrightarrow f(\underline{r}) \overset{!}{=} f(|\underline{r}|)$$

$\square$

Satz: Eine konservative Kraft ist Zentralkraft

$\Leftrightarrow$ $V(\underline{r}) = V(|\underline{r}|)$

d.h. Potenzial kugelsymmetrisch

Beweis: Sei $\underline{F}$ konservativ.

(i) $V(\underline{r}) = V(|\underline{r}|) \implies \underline{F} = -\underline{\nabla} V(r) = -\frac{dV}{dr}\,\underline{\nabla} r$

Mit $\frac{\partial}{\partial x_i} r = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$,

also $\underline{\nabla} r = \frac{\underline{r}}{r} = \underline{e}_r$, folgt $\underline{F} = -\underbrace{\frac{dV(r)}{dr}}_{f(r)}\,\underline{e}_r$

(ii) $\underline{F} = f(r)\,\underline{e}_r \implies -\underline{\nabla} V = f(r)\frac{\underline{r}}{r} \overset{\text{s.o.}}{=} f(r)\,\underline{\nabla} r$

Sei $g(r)$ eingeführt mit $\frac{dg(r)}{dr} = f(r)$

Dann

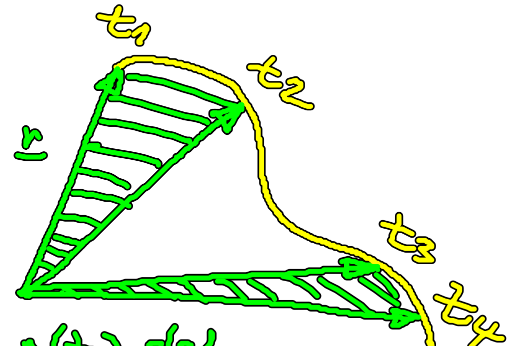
$$-\underline{\nabla} V = \frac{dg(r)}{dr}\,\underline{\nabla} r = \underline{\nabla} g(r)$$

also kann $V = -g(r)$ nur von $r = |\underline{r}|$ abhängen. □

Für Zentralkräfte folgt aus der Drehimpulserhaltung $\underline{L} = \text{const}$ folgendes für die Bahn $\underline{r}(t)$:

Satz 1: Bewegung in einer Ebene $\perp \underline{L}$

Satz 2 (Flächensatz): Der Radiusvektor (Fahrstrahl) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.



Beweis:

(1) $\underline{L} = \text{const}$ (Richtung von $\underline{L}$ fest)

$\implies$ da $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \perp \underline{r}$, muss $\underline{r}(t)$ stets in einer Ebene $\perp \underline{L}$ liegen: $\underline{r} \cdot \underline{L} = 0$

(2) $|\underline{L}| = \text{const}$ (Betrag von $\underline{L}$ fest)

$\implies dS = \frac{1}{2}|\underline{r}(t) \times d\underline{r}|$

$= \frac{1}{2}|\underline{r}(t) \times \dot{\underline{r}}\,dt|$

$$= \frac{1}{2}\, dt\, |\underline{r} \times \dot{\underline{r}}|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\underline{L}|$$ Flächengeschwindigk. □

Integration der Bewegungsgl. für konservat. Zentralkräfte

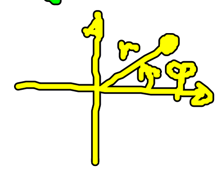
Ausnutzung der 1. Integrale der Bewegung

$$\underline{L} = m(\underline{r} \times \dot{\underline{r}}) = const. \quad \text{(Drehimpulserhaltung)}$$

$$E = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 + V(r) = const. \quad \text{(Energieerhaltung)}$$

$\underline{L} = const. \Rightarrow$ ebene Bewegung (oBdA: x-y-Ebene)

Wähle ebene Polarkoord. $\left(\begin{array}{l} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r \sin\varphi \end{array} \right)$



$$\underline{r} = r(t)\, \underline{e}_r(t)$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\, \underline{e}_r + r \dot{\underline{e}}_r = \dot{r}\, \underline{e}_r + r\dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{r}}^2 = (\dot{r}\, \underline{e}_r + r\dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi)(\dot{r}\, \underline{e}_r + r\dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \qquad (*)$$

da $\underline{e}_r \cdot \underline{e}_\varphi = 0$

(folgt auch direkt aus $\dot{\underline{r}}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{r}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$)

$$\underline{L} = m\, \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = m r\, \underline{e}_r \times (\dot{r}\, \underline{e}_r + r\dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi) = m r^2 \dot{\varphi}\, \underbrace{\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi}_{\underline{e}_3}$$

Damit lässt sich $\dot{\varphi}$ durch $L = m r^2 \dot{\varphi}$ $(**)$ ausdrücken:

$$\dot{\underline{r}}^2 \overset{(*)}{=} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$ $\Rightarrow$ nur noch 1 Variable $r(t)$

Energieerhaltungssatz:

$$(1) \quad \boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Zentrifugalpotenzial}} + V(r)}_{V_{eff}(r) \text{ effektives Radialpotenzial}}}$$ Dgl. 1. Ordnung für $r(t)$

(quasi-eindimensional)

Integration von (1):

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - V_{eff}(r)$$

$$\dot{r} = (\pm)\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}} = \int dt$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} = t - t_0 \quad \xrightarrow{\text{Umkehrung}} \quad r = r(t)$$

Berechnung von $\varphi = \varphi(t)$ aus Drehimpulserhaltungssatz:

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}\,dt = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\dot{r}} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

Integration:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{L\,dr'}{r'^2\sqrt{2m\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \quad \xRightarrow{\text{Umkehrung}} \quad \boxed{r = r(\varphi)}$$

Bahn in Polarkoord.

Einsetzen in $r = r(t) \longrightarrow \varphi = \varphi(t)$

Damit
$$\boxed{\underline{r}(t) = r(t)\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix}}$$
Bahnkurve

Gestalt der Bahn hängt von den Integrationskonst. E, L ab

Klass. erlaubte Bewegung:

$$E \geq V_{eff}(r)$$

Klass. verbotene Bewegung:

$$E < V_{eff}(r)$$

Klass. Umkehrpunkte

$$E = V_{eff}(r)$$

$$\Longrightarrow \boxed{r_{min} < r < r_{max}}$$