English Summary:

1.5 Central forces and conservation of angular momentum

angular momentum $\boxed{\underline{L} \equiv \underline{r} \times \underline{p}}$

torque $\boxed{\underline{M} \equiv \underline{r} \times \underline{F}}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\underline{L} = \underline{M}}$

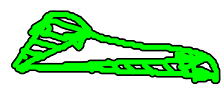
Conservation of angular momentum: $\frac{d}{dt}\underline{L} = 0 \iff \underline{M} = 0$

for conservative force: $\iff$ central force $\underline{F}(\underline{r}) = f(r)\,\underline{e}_r$

$\iff$ rotationally invariant potential $V(\underline{r}) = V(|\underline{r}|)$

For central forces:

Theorem 1: motion in plane $\perp \underline{L}$



Theorem 2 (Kepler's 2nd Law): The radius vector sweeps out equal areas in equal times

Integration of eqs. of motion for conservative central forces:

- angular momentum conservation: $L = mr^2\dot{\varphi}$
- energy conservation: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{eff}(r) \text{ eff. radial potential}} \Longrightarrow r(t)$

1.7 Planetenbewegung (Kepler'sche Gesetze)

Bewegung im Zentralpot. $V(r)$:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Energieerhaltungssatz = 1. Integral

Betrachte nun speziell Gravitationspot.

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$$

γ Gravitationskonstante

M = Sonnenmasse

Effektives Radialpot.

$$V_{eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad k := \gamma m M > 0$$

$r \to 0$: $V_{eff}(r) \sim \frac{L^2}{2mr^2} \to \infty$

$r \to \infty$: $V_{eff}(r) \sim -\frac{k}{r} \to 0$

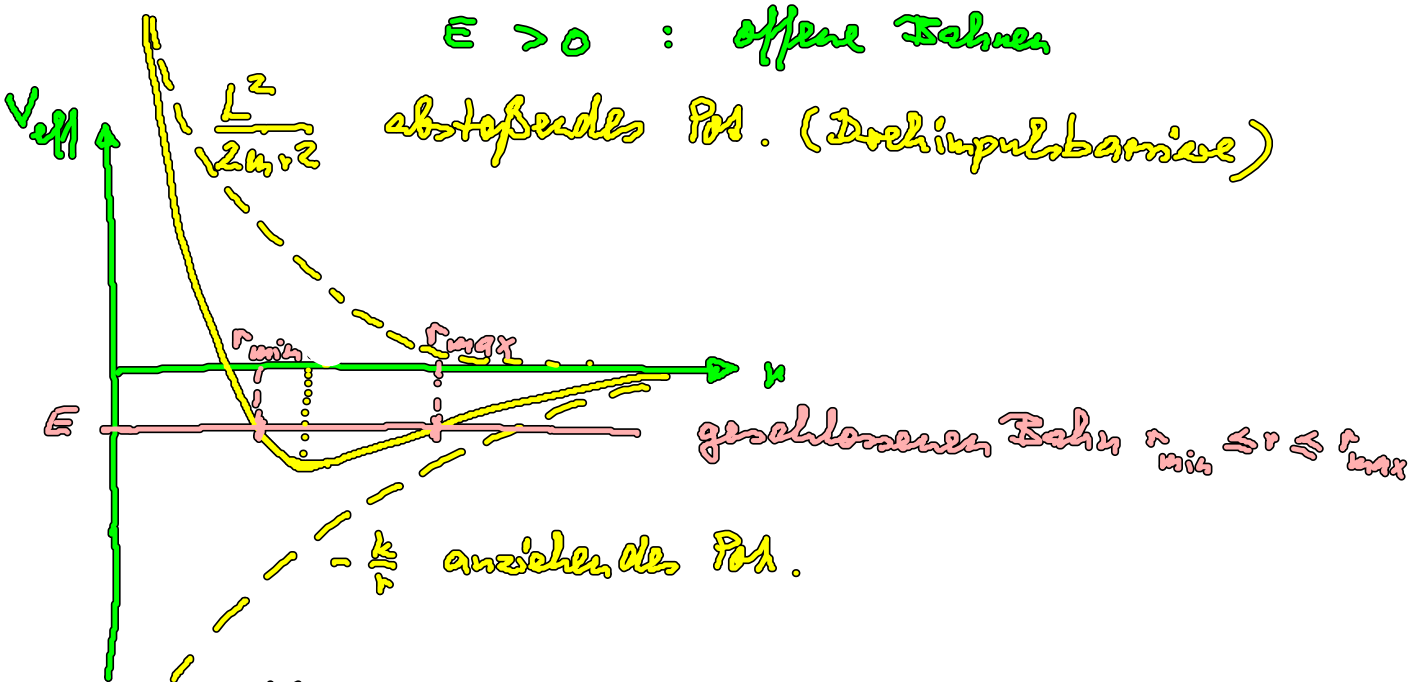
Minimum : $\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{2L^2}{2mr^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{mk}$

$$V_{eff}(r_0) = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

Wegen $\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - V_{eff}(r)$ ist eine Bewegung nur für $V_{eff}(r) \leq E$, also auch nur für $E > V_{eff}(r_0)$

$-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$: geschlossene Bahnen

$E > 0$: offene Bahnen



Für $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$ sind die beiden Umkehrpkte. durch

$$V_{eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \stackrel{!}{=} E \qquad (E<0)$$

$$\Leftrightarrow |E|r^2 - kr + \frac{L^2}{2m} = 0$$

bestimmt:

$$r_{min/max} = \frac{1}{2|E|}\left(k \mp \sqrt{k^2 - \frac{2L^2|E|}{m}}\right)$$

Für $E > 0$ ergibt sich 1 innerer Umkehrpkt:

$$Er^2 + kr - \frac{L^2}{2m} = 0$$

$$r_{min} = \frac{1}{2E}\left(-k \overset{+}{(-)} \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}\right)$$

(nur 1 Lösung $r > 0$!)

$\Rightarrow$ Bahn ist offen

Bahngleichung:

Drehimpulserhaltungssatz $L = mr^2\dot{\varphi} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

+ Energieerhaltungssatz $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}$ ergibt

durch Division: Elimination der Zeit

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}} = \frac{1}{r^2\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E + \frac{k}{r'} - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}}$$

quadrat. Ergänzung

$$\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2 r'} - \frac{1}{r'^2} = -\left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{m^2k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

$$= D\left[1 - \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{L^2}\right)^2\right]$$

mit $D := \frac{m^2k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} = \frac{2m}{L^2}\Big(\underbrace{\underbrace{\frac{mk^2}{2L^2}}_{-V_{eff}(r_0)} + E}_{>0 \text{ (klass. erlaubt)}}\Big) > 0$

Substitution:

$$\cos\vartheta' = \frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{L^2}\right)$$

$$-\sin\vartheta' \, d\vartheta' = -\frac{dr'}{\sqrt{D}\, r'^2}$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta' \sin\vartheta' \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 - \cos^2\vartheta'}}_{\sin\vartheta'}} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta' = \vartheta - \vartheta_0$$

$$= \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{L^2}\right)\right] - \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{mk}{L^2}\right)\right]$$

über eine der beiden Int.konst. φ_0, r_0 kann frei verfügt werden (willkürl. Wahl des Winkels).

Mit der Wahl

$$\varphi_0 = \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{mk}{L^2}\right)\right]$$

ergibt sich

$$\varphi(r) = \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{L^2}\right)\right]$$

$$\sqrt{D}\cos\varphi = \frac{1}{r} - \frac{mk}{L^2}$$

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{D}\cos\varphi = \frac{mk}{L^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi)$$

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{L^2/(mk)}{1 + \varepsilon\cos\varphi}} \quad \text{mit } \varepsilon := \sqrt{D}\,\frac{L^2}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

Gleichung eines allg. Kegelschnittes in Polarkoord.:

$\varepsilon > 1 \;\hat{=}\; E > 0$ Hyperbel (offene Bahn)

$\varepsilon = 1 \;\hat{=}\; E = 0$ Parabel (")

$\varepsilon < 1 \;\hat{=}\; -\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$ Ellipse (geschlossene Bahn)

ε heißt numerische Exzentrizität.

Ellipse ($\varepsilon < 1$):

Umrechnung auf kartes. Koord. durch

$\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$p := \frac{L^2}{mk}$, $\quad$ Halbachsen $a := \frac{p}{1-\varepsilon^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

Exzentrizität $e := \varepsilon a = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$

Ellipsengl. $\quad r + \varepsilon\underbrace{r\cos\varphi}_{x} = p$

$$\Leftrightarrow \quad r = p - \varepsilon x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 = (p - \varepsilon x)^2.$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2(1-\varepsilon^2)+2\varepsilon p x + y^2 = p^2$$

quadrat. Ergänzung

$$(1-\varepsilon^2)(x+e)^2 + y^2 = p^2\,\frac{1}{1-\varepsilon^2} \qquad \Big| : \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

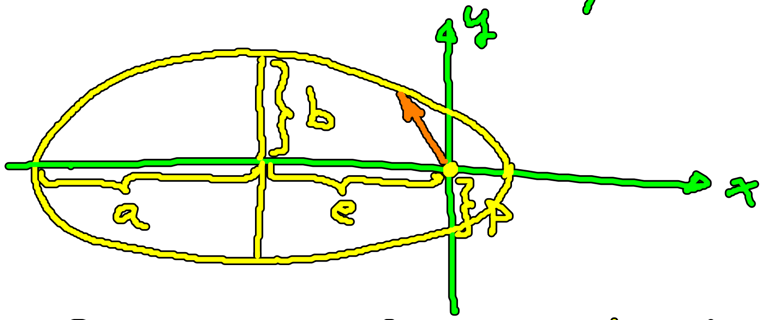
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{(x+e)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{2|E|p}{k}}$$

Ellipse mit großer Halbachse $a=\frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$

kleine Halbachse $b=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$

Verschiebung um $e=\sqrt{a^2-b^2}$ (Exzentrizität)
so dass 1 Brennpkt. im Ursprung liegt



$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

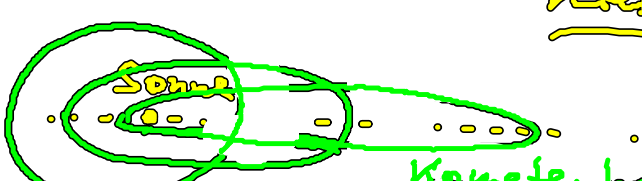
Energie E legt große Halbachse fest: $a=\frac{k}{2|E|}$
Drehimpuls L legt $p=\frac{L^2}{mk}$ und damit die kleine Halbachse ($b^2=ap$) und Exzentrizität ($e^2=a^2-ap$) fest.

Je kleiner der Drehimpuls L, desto kleiner p und damit umso exzentrischer ist die Ellipse.

Max. Drehimpuls bei geg. Energie $E<0$:

$$L^2=\frac{mk^2}{2|E|} \Rightarrow p=a \Rightarrow b=a \Rightarrow \varepsilon=0$$

<u>Kreisbahn</u> $r(\varphi)=p=\text{const}$



Kometenbahn (z.B. Bopp-Hale)

Satellitenbahn um die Erde: $E < 0$

L muss groß genug sein, so dass $r \geq R$ (Erdradius

$\Rightarrow$ Mindestgeschwind. $v_1 \parallel$ Erdoberfläche

$v_1 = 7.9\ \frac{km}{s}$ (1. kosm. geschw.)

Fluchtgeschw. von der Erde: $E = 0$

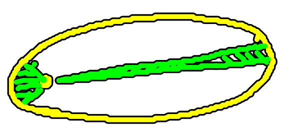
Auf der Erdoberfl. $mg = \gamma \frac{mM}{R^2}$

$\Rightarrow 0 = E = \frac{m}{2}v^2 - \underbrace{\gamma \frac{mM}{R}}_{mgR}$

$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR} = 11{,}2\ \frac{km}{s}$ (2. kosm. geschw.)

Kepler'sche Gesetze

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpkt. die Sonne steht
   (folgt aus Energie- u. Drehimpulserh.)
2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz)



$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}|\underline{L}| = const \quad (§1.6)$$

3. $T^2 \sim a^3$ (T Umlaufzeit, a große Halbachse)

Beweis: Ellipsenfläche $S = \pi ab$ (1)

Flächensatz $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const.$

$\Rightarrow S = \int_0^T \frac{dS}{dt}\,dt = \frac{L}{2m}T$ (2)

$$\frac{b^2}{a} = \frac{L^2/(2m|E|)}{k/(2|E|)} = \frac{L^2}{mk} \Rightarrow b = \frac{L}{\sqrt{mk}}\sqrt{a}$$

(1) = (2)

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi m ab}{L} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\, a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}}\, a^{3/2}$$

unabh. von der Planetenmasse m

NB: Mitbewegung der Sonne vernachlässigt!