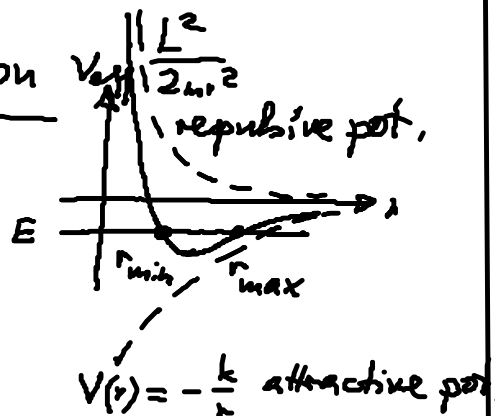
English Summary:

1.7 Kepler's Laws of planetary motion



$$V_{eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (k \equiv \gamma m M)$$

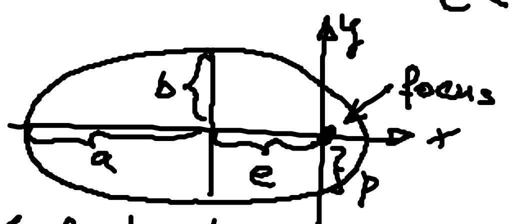
closed orbit $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ for $E<0$

Energy + angular momentum conservation $\Rightarrow$ orbital eq.

$$r(\varphi) = \frac{L^2/(mk)}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$\varepsilon > 1$ hyperbola } open orbits
$\varepsilon = 1$ parabola } open orbits
$\varepsilon < 1$ ellipse with num. excentricity

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$ closed (planets)



Kepler's Laws:
(i) Planets move on ellipse, with sun at one focus
(ii) Radius vector sweeps out equal areas in equal times
(iii) $T^2 \sim a^3$

1.8 Relativbewegung

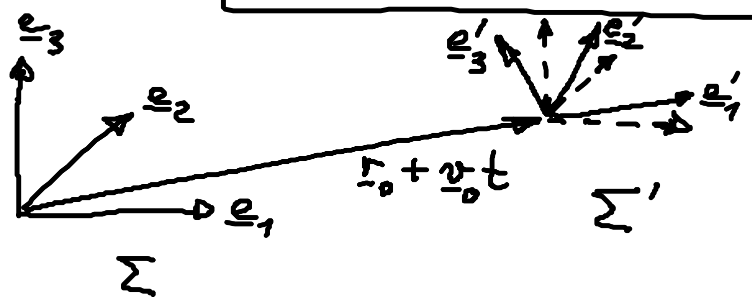
Wir betrachten nun relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme (Bezugssysteme)

Die Newton'schen Axiome gelten in Inertialsystemen
(kräftefreie Massenpunkte bewegen sich geradlinig-gleichförmig)

Allgemeinste Transformation T, die Inertialsysteme in einander abbildet:

$T : \Sigma \to \Sigma'$ <u>Galilei-Transf.</u>

$$\boxed{\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \underline{\underline{R}}\,\underline{r}}$$



- Translation des Koord.ursprungs um festes $\underline{r}_0$
- gleichförmige Bewegung von Σ' relativ zu Σ : $\underline{v}_0 t$

  (<u>Galilei boost</u> = eigentliche Galileitransf.)
- Drehung von Σ' : $\underline{r} \mapsto \underline{\underline{R}}\,\underline{r}$

  $\underline{\underline{R}}$ ist 3×3 - Drehmatrix $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

  in Komponenten : $x_i' = \sum_{k=1}^{3} R_{ik} x_k \quad (i=1,2,3)$

  Es muss gelten $\underline{r}'^2 \overset{!}{=} \underline{r}^2$ (Erhaltung der Längen)

  $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i' x_i' = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} R_{ik} R_{il} x_k x_l \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{3} x_k x_k$$

  also $\sum_{i=1}^{3} R_{ik} R_{il} = \delta_{kl}$ $\left(\Rightarrow \sum_k \sum_l \delta_{kl} x_k x_l = \sum_k x_k x_k \right)$

  d.h. $\sum_{i=1}^{3} (R^T)_{ki} R_{il} = \delta_{kl}$ mit der transponierten Matrix R^T

  d.h. $\boxed{\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \mathbb{1}}$ (*)

  mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Eine reelle Matrix mit der Eigenschaft (*) heißt <u>orthogonal</u> $\left(\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1} \right)$. = <u>Drehmatrix</u>

- Verschiebung des Zeitnullpunktes $t \mapsto t + t_0$

Bem.: Die Galileitransformationen bilden eine 10 parametrige kontinuierliche Gruppe.

Bedeutung der Galilei-Transformation:

Alle Inertialsysteme sind physikalisch äquivalent. Die Newton'schen Gln. sind forminvariant:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(r) \iff m\ddot{\underline{r}}' = \underline{F}(\underline{r}')$$

oder:
Bezüglich des Ablaufs physikalischer Vorgänge ist der Raum

- homogen (invariant gegen Transl. $\underline{r}_0$)
- isotrop (invariant gegen Rot. $\underline{\underline{R}}$)

die Zeit

- homogen (invar. gegen Zeitverschiebung t_0)

und das Raumzeitkontinuum

- invariant gegen gleichförmige Bewegung (galilei boost $\underline{v}_0 t$)

Trägheitsprinzip:

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}' \iff \underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t$$

NB: Diese Hypothesen haben als Konsequenz die Existenz eines <u>absoluten Raumes</u> und einer <u>absoluten Zeit</u>, die eine euklidische Mannigfaltigkeit bilden.

Spezielle Relativitätstheorie: keine absolute Zeit, Zeit wird mittransformiert

- Transformation zwischen 2 Inertialsystemen

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

c Lichtgeschw.

Lorentz-Transformation

Zusammenhang zwischen Invarianz gegen Galilei-Transformation und Erhaltungssätzen

Invarianz des mech. Systems gegen

- Raumtranslation $\Rightarrow$ Impulserhaltung
- Rotation $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung
- Galilei boost $\Rightarrow$ Schwerpunktsatz

  $\underline{r}_S(t) = \underline{r}_S(0) + \underline{v}t$

  (Schwerpkt. bewegt sich in jedem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig) ($\underline{v} = \text{const.}$)
- Zeitverschiebung $\Rightarrow$ Energieerhaltung

Beweis: Annahme, dass Potenzial V existiert

(i) Invarianz des Potenzials gegen beliebige, kontinuierliche Raumtranslationen $\underline{r}_0$:

$$V(\underline{r}) = V(\underline{r} + \underline{r}_0) \Rightarrow V(\underline{r}) = \text{const.} \Rightarrow \underline{F} = -\underline{\nabla}V = 0$$

Newton: $\underline{F} = \dot{\underline{p}} = 0 \Rightarrow \underline{p} = \text{const.}$

(ii) Invarianz des Pot. gegen Rotation:

$$V(\underline{r}) = V(|\underline{r}|) \overset{\S 1.6}{\Longrightarrow} \underline{F} = -\underline{\nabla} V = f(r)\,\underline{e}_r$$

Zentralkraft

$$\Longrightarrow \quad \underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = \text{const.}$$

(iii) Galilei-Invarianz:

Die Größe $\underline{r}_s(0) = \underline{r}_s(t) - \underline{v}t$ ist invariant unter Galilei boost $\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{r} + \underline{v}_0 t$:

$$\begin{aligned}
\underline{r}_s(0) &= \underline{r}_s'(t) - \underline{v}_0 t - \underline{v}t \\
&= \underline{r}_s'(t) - (\underline{v} + \underline{v}_0)t \\
&= \underline{r}_s'(t) - \underline{v}'t = \underline{r}_s'(0)
\end{aligned}$$

(geschw. add.)

(iv) Invarianz des Pot. gegen bel. Zeitverschiebung t_0:

$$V(\underline{r}, t) = V(\underline{r}, t + t_0) \Longrightarrow V(\underline{r}) \text{ nicht explizit zeitabhängig}$$

$$\Longrightarrow \text{konservatives System} \overset{\S 1.3}{\Longrightarrow} E = T + V = \text{const.}$$

NB: Es besteht ein tiefliegender Zusammenhang zwischen Symmetrien (Invarianz gegen kontinuierliche Transformationen) und Erhaltungssätzen (Noether'sches Theorem).