

English Summary:

1.7 Kepler's Laws of planetary motion

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (k = \gamma m_1 M)$$

closed orbit $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$ for $E < 0$

Energy + angular momentum conservation

$$r(\varphi) = \frac{L^2 / (mk)}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

$\epsilon > 1$ hyperbola

$\epsilon = 1$ parabola

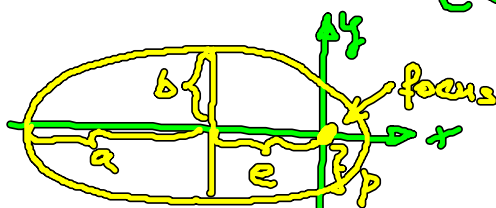
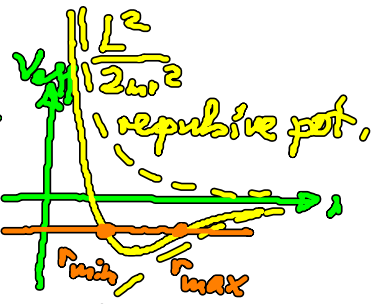
$\epsilon < 1$ ellipse with min. eccentricity

\Rightarrow orbital eq.

open orbits

closed (planets)

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$



Kepler's Laws:

- (i) Planets move on ellipse, with sun at one focus
- (ii) Radius vector sweeps out equal area in equal times
- (iii) $T^2 \sim a^3$

1.8 Relativbewegung

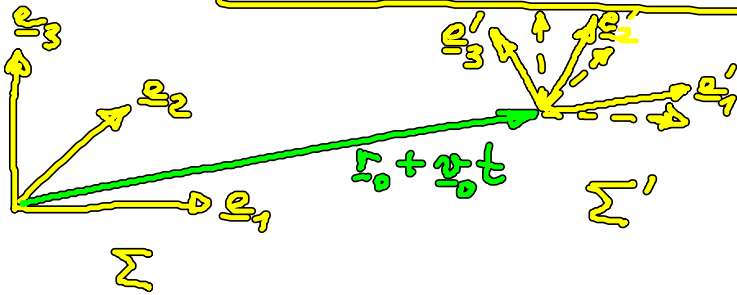
Wir betrachten nun relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme (Bezugssysteme)

Die Newton'schen Axiome gelten in Inertialsystemen (kräftefreie Massenpunkte bewegen sich geradlinig-gleichförmig)

Allgemeine Transformation T , die Inertialsysteme in einander abbildet;

$T: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ Galilei-Transf.

$$\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \underline{R} \underline{r}$$



- Translation des Koord.ursprungs um festes \underline{r}_0
- gleichförmige Bewegung von Σ' relativ zu Σ : $\underline{v}_0 t$
(Galilei boost = eigentliche Galilei-Transf.)
- Drehung von Σ' : $\underline{r} \mapsto \underline{R} \underline{r}$

\underline{R} ist 3×3 -Drehmatrix $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

in Komponenten: $x'_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} x_k$ ($i=1,2,3$)

Es muss gelten $\underline{r}'^2 \stackrel{!}{=} \underline{r}^2$ (Erhaltung der Längen)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 x'_i x'_i = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^3 R_{ik} R_{il} x_k x_l \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^3 x_k x_k$$

also $\sum_{i=1}^3 R_{ik} R_{il} = \delta_{kl}$ ($\Rightarrow \sum_k \sum_l \delta_{kl} x_k x_l = \sum_k x_k x_k$)

d.h. $\sum_{i=1}^3 (R^T)_{ki} R_{il} = \delta_{kl}$ mit der transponierten Matrix R^T

d.h. $\underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{1}$ (*)

mit der Einheitsmatrix $\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eine reelle Matrix mit der Eigenschaft (*) heißt orthogonal ($\underline{R}^T = \underline{R}^{-1}$). = Drehmatrix

- Verschiebung des Zeitnullpunktes $t \mapsto t + t_0$

Bem.: Die Galileitransformationen bilden eine 10-parametrische kontinuierliche Gruppe.

Bedeutung der Galilei-Transformation:

Alle Inertialsysteme sind physikalisch äquivalent.
Die Newton'schen Gln. sind forminvariant:

$$m \underline{\ddot{r}} = \underline{F}(\underline{r}) \quad \Leftrightarrow \quad m \underline{\ddot{r}}' = \underline{F}(\underline{r}')$$

oder:

Bezüglich des Ablaufs physikalischer Vorgänge ist der Raum

- homogen (invariant gegen Transl. \underline{r}_0)
- isotrop (invariant gegen Rot. \underline{R})

die Zeit

- homogen (invar. gegen Zeitverschiebung t_0)

und das Raumzeitkontinuum

- invariant gegen gleichförmige Bewegung (Galilei boost $\underline{v}_0 t$)

Trägheitsprinzip:

$$\underline{\ddot{r}} = \underline{\ddot{r}}' \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t$$

NB: Diese Hypothesen haben als Konsequenz die Existenz eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit, die eine euklidische Mannigfaltigkeit bilden.

Spezielle Relativitätstheorie : keine absolute Zeit,
Zeit wird mittransformiert

- Transformation zwischen 2 Inertialsystemen

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Lorentz-Transformation

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

c Lichtgeschw.

Zusammenhang zwischen Invarianz gegen
Galilei-Transformation und Erhaltungssätzen

Invarianz des mech. Systems gegen

- Raumtranslation \Rightarrow Impulserhaltung

- Rotation \Rightarrow Drehimpulserhaltung

- Galileiboost \Rightarrow Schwerpunktsatz

$$\underline{r}_S(t) = \underline{r}_S(0) + \underline{v}t$$

(Schwerpkt. bewegt sich
in jedem Inertialsystem
gleichmäßig und gleichförmig)
($\underline{v} = \text{const.}$)

- Zeitverschiebung \Rightarrow Energieerhaltung

Beweis : Annahme, dass Potenzial V existiert

- (i) Invarianz des Potentials gegen beliebige,
kontinuierliche Raumtranslationen \underline{r}_0 :

$$V(\underline{r}) = V(\underline{r} + \underline{r}_0) \Rightarrow V(\underline{r}) = \text{const.} \Rightarrow \underline{F} = -\underline{\nabla}V = 0$$

$$\text{Newton: } \underline{F} = \dot{\underline{p}} = 0 \Rightarrow \underline{p} = \text{const.}$$

(ii) Invarianz des Pot. gegen Rotation:

$$V(\underline{r}) = V(|\underline{r}|) \stackrel{\S 1.6}{\Rightarrow} \underline{F} = -\underline{\nabla} V = f(r) \underline{e}_r$$

Zentralkraft

$$\Rightarrow \underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = \text{const.}$$

(iii) Galilei-Invarianz:

Die Größe $\underline{r}_S(0) = \underline{r}_S(t) - \underline{v}t$ ist invariant unter Galileiboost $\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{r} + \underline{v}_0 t$:

$$\begin{aligned} \underline{r}_S(0) &= \underline{r}'_S(t) - \underline{v}_0 t - \underline{v}t \\ &= \underline{r}'_S(t) - (\underline{v} + \underline{v}_0) t \\ &= \underline{r}'_S(t) - \underline{v}' t = \underline{r}'_S(0) \end{aligned}$$

(geschw.add.)

(iv) Invarianz des Pot. gegen bel. Zeitverschiebung t_0 :

$$V(\underline{r}, t) = V(\underline{r}, t + t_0) \Rightarrow V(\underline{r}) \text{ nicht explizit zeitabhängig}$$

§ 1.3

$$\Rightarrow \text{konservatives System} \Rightarrow E = T + V = \text{const.}$$

NB: Es besteht ein tiefliegender Zusammenhang zwischen Symmetrie (Invarianz gegen kontinuierliche Transformationen) und Erhaltungssätzen (Noether'sches Theorem).