English Summary:

1.8 Relative motion

general transformation between inertial systems:

galilei transform $\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{r}_0 + \underbrace{\underline{v}_0 t}_{\text{galilei boost}} + \underline{\underline{R}}\,\underline{r}$

rotation: orthogonal matrix $\underline{\underline{R}}$ $\boxed{R^T R = 1}$

general relation between symmetries and conservation laws:

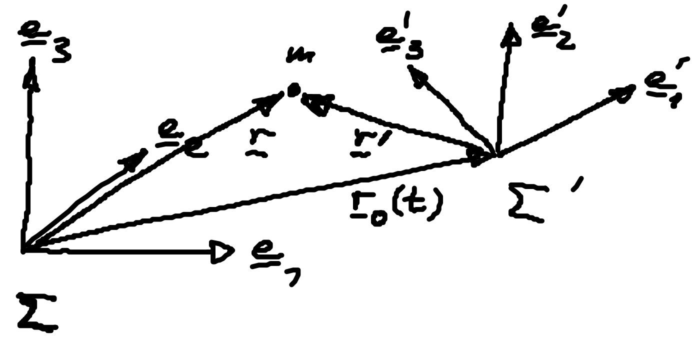
Invariance against continuous transformations (Noether):

- spatial translation $\Leftrightarrow$ momentum conservation
- rotation $\Leftrightarrow$ angular momentum conservation
- galilei invariance $\Leftrightarrow$ center of mass law in any inertial system $\underline{r}_S(t) = \underline{r}_S(0) + \underline{v}t$
- time translation $\Leftrightarrow$ energy conservation

1.9 Beschleunigte Bezugssysteme

Sei Σ ein Inertialsystem.

Betrachte ein hierzu beschleunigtes Bezugssystem Σ':



$\underline{r}_0(t)$: relative Bewegung der Koord.ursprünge

dann Drehung von Σ'

Ortsvektor des Massenpunktes m:

$$\underline{r} = \underline{r}_0(t) + \underline{r}' = \underline{r}_0(t) + \sum_{i=1}^{3} x_i' \underline{e}_i'$$

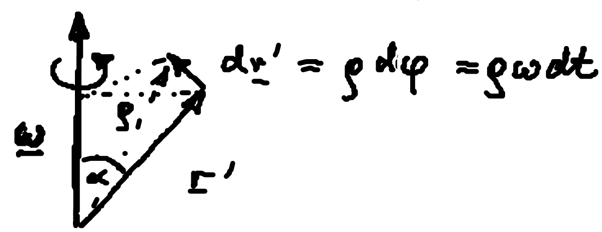
Geschwindigkeit:

in Σ': $\dot{\underline{r}}' = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i' \underline{e}_i'$ $\quad$ ($\underline{e}_i'$ fest!)

in Σ: $$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \Big(\underbrace{\dot{x}_i' \underline{e}_i'}_{\text{geschw. in } \Sigma'} + \underbrace{x_i' \dot{\underline{e}}_i'}_{\text{geschw. eines starr mit } \Sigma' \text{ rotierenden Pktes. von } \Sigma \text{ aus gesehen}} \Big)$$

$x_i' = \text{const.}$ $\Uparrow$

$$|d\underline{r}'| = \overbrace{|\underline{r}'| \sin\alpha}^{\rho}\, \omega\, dt = |\underline{r}' \times \underline{\omega}|\, dt$$



$$\Rightarrow \frac{d\underline{r}'}{dt} = \sum_{i=1}^{3} x_i' \dot{\underline{e}}_i' = \underline{\omega} \times \underline{r}'$$ für starr mitrotierenden Pkt.

(Rechtehandregel!)

Also in Σ: $\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + \dot{\underline{r}}' + \underline{\omega} \times \underline{r}'$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\underline{r} - \underline{r}_0) = \frac{d}{dt}\underline{r}' = \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega}\times\right)\underline{r}'}$$

Zeitableitung in Σ $\qquad$ Zeitabl. in Σ'

Beschleunigung:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}} - \dot{\underline{r}}_0) = \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}' + \underline{\omega} \times \underline{r}')$$
$$= \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega}\times\right)(\dot{\underline{r}}' + \underline{\omega} \times \underline{r}')$$
$$= \ddot{\underline{r}}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') + 2\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}'$$

Bewegungsgl. in Σ:

Nicht-Newton'sche Gl.

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

Bewegungsgl. in Σ' (Nichtinertialsystem)

$$\boxed{m\underline{\ddot{r}}' = \underbrace{m\underline{\ddot{r}}}_{\underline{F}} \underbrace{- m\underline{\ddot{r}}_0 - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') - 2m\underline{\omega}\times\underline{\dot{r}}' - m\underline{\dot{\omega}}\times\underline{r}'}_{\text{Scheinkräfte (Trägheitskräfte)}}}$$

Trägheitskräfte:

$-m\underline{\ddot{r}}_0$ Beschleunigung des Koordinatenursprungs relativ zu Σ

Beispiel: Sei Σ' frei fallender Fahrstuhl

$$-m\underline{\ddot{r}}_0 = -m\underline{g} = -\underline{F}_g$$

$\Rightarrow$ Trägheitskraft kompensiert die Gewichtskraft $\underline{F}_g$

$\Rightarrow m\underline{\ddot{r}}' = \underline{F}_g - \underline{F}_g = 0$ Schwerelosigkeit (Fallturm!)

$\underline{F}_Z = -m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}')$ Zentrifugalkraft

$|\underline{F}_Z| = m\omega^2 r'$ falls $\underline{\omega}\perp\underline{r}'$ (ebene Kreisbewegung) (Satellit im Erdorbit)

$\underline{F}_c = -2m\underline{\omega}\times\underline{\dot{r}}'$ Corioliskraft

Kraft auf bewegte Körper im rotierenden Bezugssystem

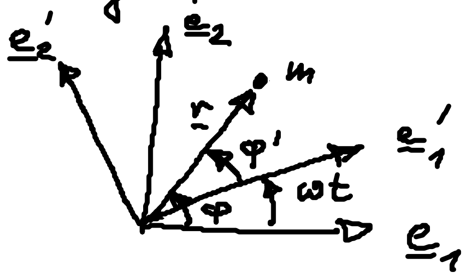
$\underline{F}_r = -m\underline{\dot{\omega}}\times\underline{r}'$

Kraft im ungleichförmig rotierenden Bezugssystem

Gleichförmig rotierendes Bezugssystem

Sei $\underline{\omega} = \text{const} \parallel \underline{e}_3$-Achse

Zylinderkoord.:



Σ : (ϱ, φ, z) Inertialsystem

Σ' : (ϱ', φ', z') rotierendes System

$$\varrho = \varrho'$$
$$\varphi = \varphi' + \omega t$$
$$z = z'$$

Newton'sche Gl. in Zylinderkoord. in Σ:

$$\underline{r} = \varrho \underline{e}_\varrho + z \underline{e}_z$$

$$\underline{\dot{r}} = \dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \underline{\dot{e}}_\varrho + \dot{z} \underline{e}_z = \dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z$$

$$\underline{\ddot{r}} = \ddot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \dot{\varrho} \underbrace{\underline{\dot{e}}_\varrho}_{\dot{\varphi} \underline{e}_\varphi} + \dot{\varrho} \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \varrho \ddot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \varrho \dot{\varphi} \underbrace{\underline{\dot{e}}_\varphi}_{-\dot{\varphi} \underline{e}_\varrho} + \ddot{z} \underline{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = m \underline{\ddot{r}} = \underbrace{m(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2)}_{F_\varrho} \underline{e}_\varrho + \underbrace{m(\varrho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\varrho} \dot{\varphi})}_{F_\varphi} \underline{e}_\varphi + \underbrace{m \ddot{z}}_{F_z} \underline{e}_z}$$

Umrechnung auf das rotierende System Σ':

$$\dot{\varrho} = \dot{\varrho}', \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}' + \omega, \quad \dot{z} = \dot{z}'$$

$$\ddot{\varrho} = \ddot{\varrho}', \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}'$$

$$F_\varrho = m(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) = m\left[\ddot{\varrho}' - \varrho'(\dot{\varphi}' + \omega)^2\right]$$

$$= m\,[\underbrace{\ddot\varrho' - \varrho'\dot\varphi'^2}_{F'_\varrho} - 2\varrho'\dot\varphi'\omega - \varrho'\omega^2]$$

F'_ϱ Kraft im rotierenden System Σ'

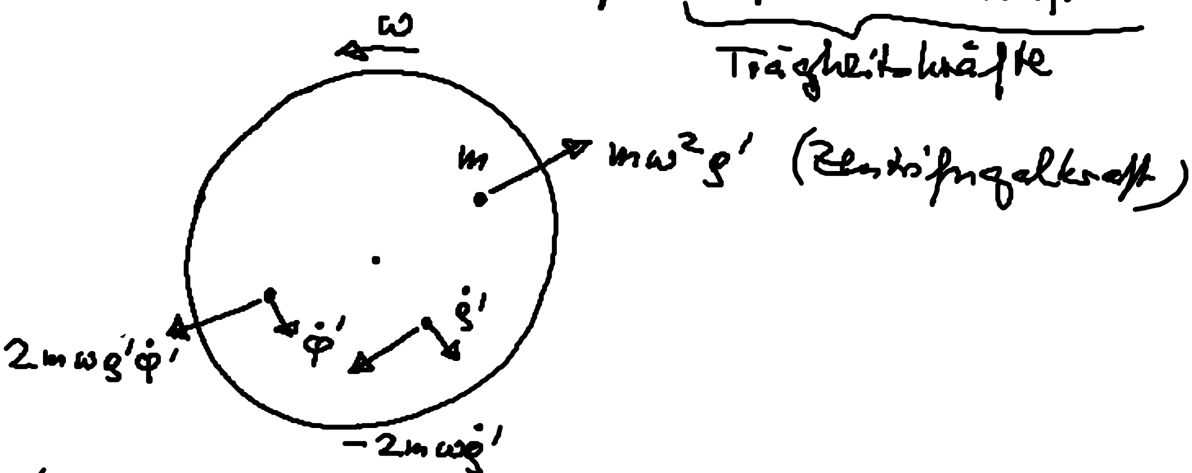
$$F_\varphi = m(\varrho\ddot\varphi + 2\dot\varrho\dot\varphi) = m\,[\underbrace{\varrho'\ddot\varphi' + 2\dot\varrho'(\dot\varphi'}_{F'_\varphi} + \omega)]$$

$$F_z = m\ddot z = \underbrace{m\ddot z'}_{F'_z}$$

Also:

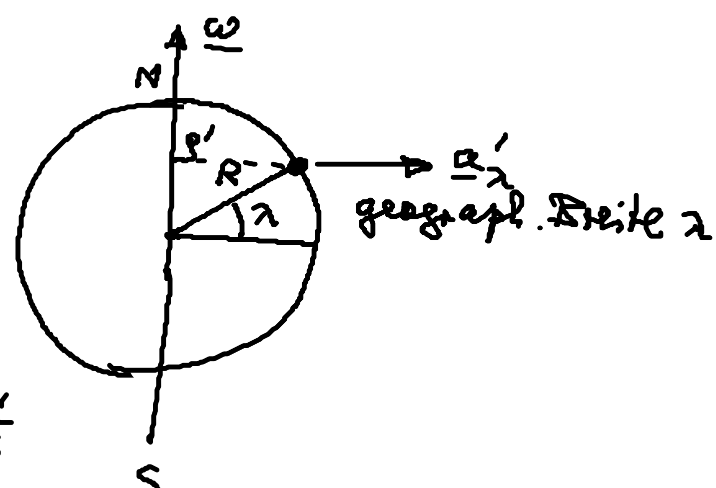
$$\boxed{\begin{aligned} F'_\varrho &= F_\varrho + 2m\omega\varrho'\dot\varphi' + m\omega^2\varrho' \\ F'_\varphi &= F_\varphi - 2m\omega\dot\varrho' \\ F'_z &= F_z \end{aligned}}$$ in Σ'

wahre Kraft — $\underbrace{\text{Corioliskraft} \quad \text{Zentrifugalkraft}}_{\text{Trägheitskräfte}}$



(Corioliskraft)

Drehung im math.-pos. Sinn: Rechtsabweichung!



Beispiel: Erdkugel

$$a'_\lambda = -\omega \times (\omega \times r') = \omega^2 \varrho' e_\varrho$$

$$R = 6{,}4 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

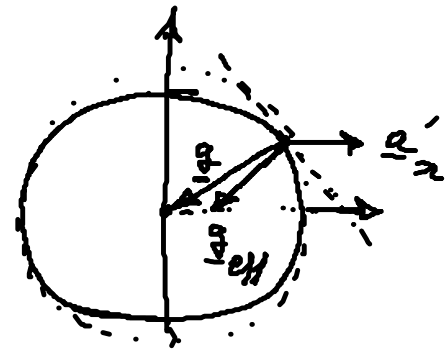
$$T = 24\ \mathrm{h} = 8{,}6 \times 10^4\ \mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}37 \times 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow a'_\lambda = 3{,}4 \times 10^{-2} \cos\lambda\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \underset{\substack{\text{Berlin}\\ \lambda = 53^\circ}}{=} 0{,}02\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$\cos\lambda \approx 0.6$

$\Rightarrow$ Abplattung der Erde,
(vgl. $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$)

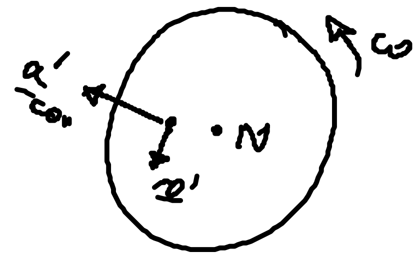


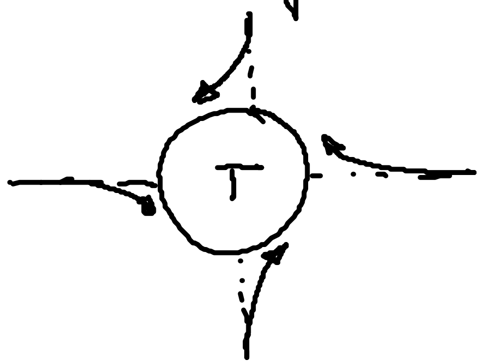
$\Rightarrow$ Abplattung der Erde,
die Erdoberfläche $\perp \underline{g}_{eff}$

Corioliskraft

großräumige Bewegung der Luftmassen:

Nordkugel $\Rightarrow$ Rechtsabweichung $\underline{a}'_{cor}$





Tiefdruckgebiet $\rightarrow$ Strömung im Gegenuhrzeigersinn

Südhalbkugel $\Rightarrow$ Linksabweichung

Passatwinde: Ablenkung