English Summary:

1.8 Relative motion

general transformation between inertial systems:

galilei transform $\quad \underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \underline{\underline{R}}\,\underline{r}$

galilei boost

rotation: orthogonal matrix $\underline{\underline{R}}$ $\quad \boxed{R^T R = 1}$

general relation between symmetries and conservation laws:

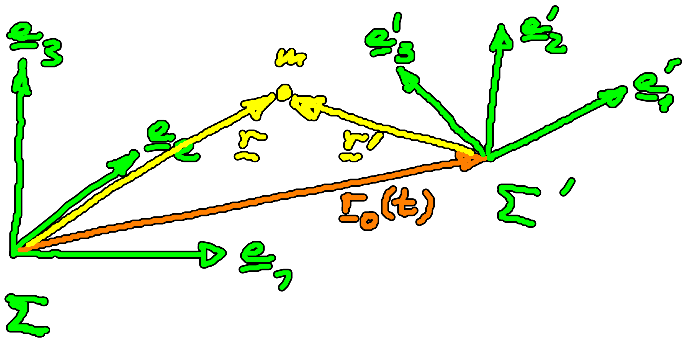
Invariance against continuous transformations (Noether):

- spatial translation $\Longleftrightarrow$ momentum conservation
- rotation $\Longleftrightarrow$ angular momentum conservation
- galilei invariance $\Longleftrightarrow$ center of mass law in any inertial system $\underline{r}_S(t) = \underline{r}_S(0) + \underline{v}t$
- time translation $\Longleftrightarrow$ energy conservation

1.9 Beschleunigte Bezugsysteme

Sei Σ ein Inertialsystem.

Betrachte ein hierzu beschleunigtes Bezugsystem Σ':



$\underline{r}_0(t)$: relative Bewegung der Koord.ursprünge

dann Drehung von Σ'

Ortsvektor des Massenpunktes m:

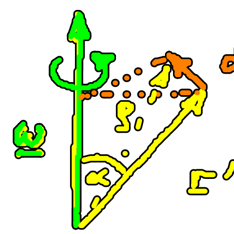
$$\underline{r} = \underline{r}_0(t) + \underline{r}' = \underline{r}_0(t) + \sum_{i=1}^{3} x_i' \underline{e}_i'$$

Geschwindigkeit:

in Σ': $\dot{\underline{r}}' = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i' \underline{e}_i'$ $\qquad$ ($\underline{e}_i'$ fest!)

in Σ: $$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \Big(\underbrace{\dot{x}_i' \underline{e}_i'}_{\text{Geschw. in } \Sigma'} + \underbrace{x_i' \dot{\underline{e}}_i'}_{\text{Geschw. eines starr mit } \Sigma' \text{ rotierenden Pktes. von } \Sigma \text{ aus gesehen}} \Big)$$

$x_i' = \text{const.}$



$d\underline{r}' = \rho\, d\varphi = \rho\omega\, dt$

$$|d\underline{r}'| = \overbrace{|\underline{r}'| \sin\alpha}^{\rho}\ \omega\, dt = |\underline{r}' \times \underline{\omega}|\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{r}'}{dt} = \sum_{i=1}^{3} x_i' \dot{\underline{e}}_i' = \underline{\omega} \times \underline{r}'$$ für starr mitrotierenden Pkt.

(Rechtehandregel!)

Also in Σ: $\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + \dot{\underline{r}}' + \underline{\omega} \times \underline{r}'$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\underline{r} - \underline{r}_0) = \frac{d}{dt}\underline{r}' = \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega}\times\right)\underline{r}'}$$

Zeitableitung in Σ $\qquad$ Zeitabl. in Σ'

Beschleunigung:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}} - \dot{\underline{r}}_0) = \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}' + \underline{\omega}\times\underline{r}')$$
$$= \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega}\times\right)(\dot{\underline{r}}' + \underline{\omega}\times\underline{r}')$$
$$= \ddot{\underline{r}}' + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'$$

Bewegungsgl. in Σ:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

Nicht-Newton'sche Gl.

Bewegungsgl. in Σ' (Nichtinertialsystem)

$$\boxed{m\ddot{\underline{r}}' = \underbrace{m\ddot{\underline{r}}}_{\underline{F}} \underbrace{- m\ddot{\underline{r}}_0 - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') - 2m\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}' - m\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'}_{\text{Scheinkräfte (Trägheitskräfte)}}}$$

Trägheitskräfte:

$-m\ddot{\underline{r}}_0$ Beschleunigung des Koordinatenursprungs relativ zu Σ

Beispiel: Sei Σ' frei fallender Fahrstuhl

$-m\ddot{\underline{r}}_0 = -m\underline{g} = -\underline{F}_g$

$\Rightarrow$ Trägheitskraft kompensiert die Gewichtskraft $\underline{F}_g$

$\Rightarrow m\ddot{\underline{r}}' = \underline{F}_g - \underline{F}_g = 0$ Schwerelosigkeit

(Fallturm!)

$\underline{F}_Z = -m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}')$ Zentrifugalkraft

$|\underline{F}_Z| = m\omega^2 r'$ falls $\underline{\omega}\perp\underline{r}'$ (ebene Kreisbewegung)

(Satellit im Erdorbit)

$\underline{F}_C = -2m\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'$ Corioliskraft

Kraft auf bewegte Körper im rotierenden Bezugssystem

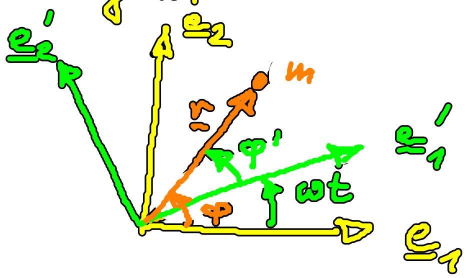
$\underline{F}_r = -m\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'$

Kraft im ungleichförmig rotierenden Bezugssystem

Gleichförmig rotierendes Bezugssystem

Sei $\underline{\omega} = \text{const} \parallel \underline{e}_3$-Achse

Zylinderkoord.:



Σ : (ρ, φ, z) Inertialsystem

Σ' : (ρ', φ', z') rotierendes System

$$\rho = \rho'$$
$$\varphi = \varphi' + \omega t$$
$$z = z'$$

Newton'sche Gl. in Zylinderkoord. in Σ:

$$\underline{r} = \rho \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z$$
$$\dot{\underline{r}} = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z} \underline{e}_z = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z$$
$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\rho} \underline{e}_\rho + \dot{\rho} \underbrace{\dot{\underline{e}}_\rho}_{\dot{\varphi} \underline{e}_\varphi} + \dot{\rho} \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \underbrace{\dot{\underline{e}}_\varphi}_{-\dot{\varphi} \underline{e}_\rho} + \ddot{z} \underline{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = m \ddot{\underline{r}} = \underbrace{m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)}_{F_\rho} \underline{e}_\rho + \underbrace{m(\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi})}_{F_\varphi} \underline{e}_\varphi + \underbrace{m \ddot{z}}_{F_z} \underline{e}_z}$$

Umrechnung auf das rotierende System Σ':

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}' \ , \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}' + \omega \ , \quad \dot{z} = \dot{z}'$$
$$\ddot{\rho} = \ddot{\rho}' \ , \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}' \ , \quad \ddot{z} = \ddot{z}'$$

$$F_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = m\left[\ddot{\rho}' - \rho'(\dot{\varphi}' + \omega)^2\right]$$

$$= m[\underbrace{\ddot\varrho' - \varrho'\dot\varphi'^2}_{F'_\varrho} - 2\varrho'\dot\varphi'\omega - \varrho'\omega^2]$$

F'_ϱ Kraft im rotierenden System Σ'

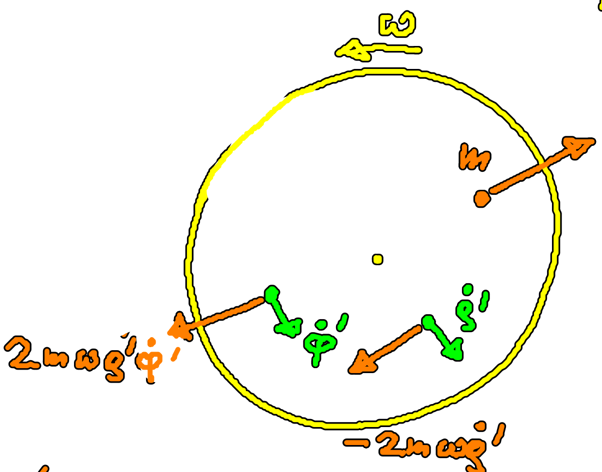
$$F_\varphi = m(\varrho\ddot\varphi + 2\dot\varrho\dot\varphi) = m\,[\underbrace{\varrho'\ddot\varphi' + 2\dot\varrho'(\dot\varphi'}_{F'_\varphi} + \omega)]$$

$$F_z = m\ddot z = \underbrace{m\ddot z'}_{F'_z}$$

Also:

$$\boxed{\begin{aligned} F'_\varrho &= F_\varrho + 2m\omega\varrho'\dot\varphi' + m\omega^2\varrho' \\ F'_\varphi &= F_\varphi - 2m\omega\dot\varrho' \\ F'_z &= F_z \end{aligned}} \quad \text{in } \Sigma'$$

wahre Kraft — $\underbrace{\text{Corioliskraft} \quad \text{Zentrifugalkraft}}_{\text{Trägheitskräfte}}$

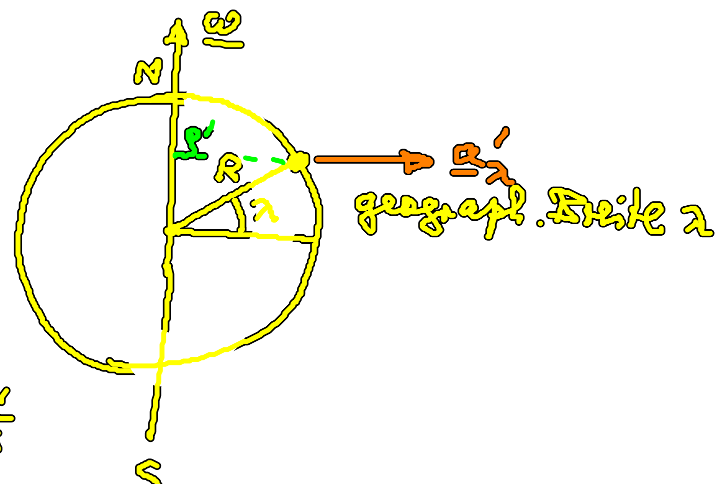


(Corioliskraft)

Drehung im math.-pos. Sinn: Rechtsabweichung!

<u>Beispiel</u>: Erdkugel

$$\underline{a}'_\lambda = -\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') = \omega^2 \varrho' \underline{e}_\varrho$$



$R = 6{,}4 \times 10^6\,\text{m}$

$T = 24\,\text{h} = 8{,}6 \times 10^4\,\text{s}$

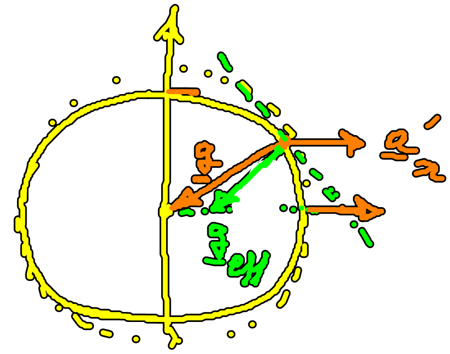
$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}37 \times 10^{-5}\,\frac{1}{s}$

$\Rightarrow a'_\lambda = 3{,}4 \times 10^{-2} \cos\lambda \,\frac{m}{s^2} = 0{,}02\,\frac{m}{s^2}$

Berlin
$\lambda = 53°$

$\cos\lambda \approx 0.6$

$\Rightarrow$ Abplattung der Erde,
(vgl. $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$)

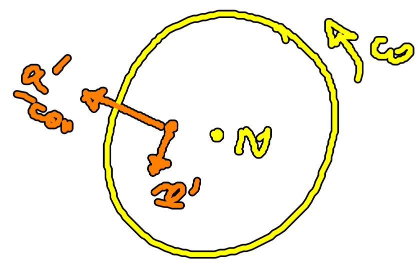


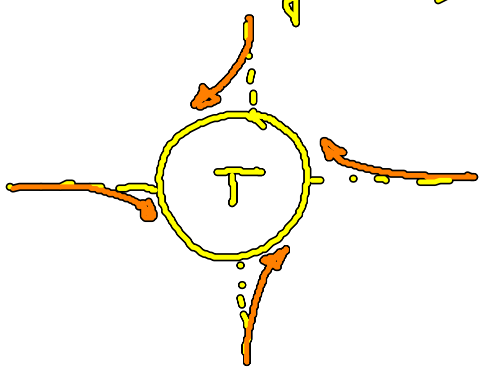
$\Rightarrow$ Abplattung der Erde,
da Erdoberfläche $\perp \underline{g}_{eff}$

Corioliskraft

großräumige Bewegung der Luftmassen:

Nordkugel $\Rightarrow$ Rechtsabweichung





Tiefdruckgebiet $\rightarrow$ Strömung im Gegenuhrzeigersinn

Südhalbkugel $\Rightarrow$ Linksabweichung

Passatwinde: Ablenkung