Summary of Chapter 1

1.1 Kinematics (coordinates, $\underline{r}$, $\underline{v}$, $\underline{a}$, $\hat{\underline{t}}$, $\hat{\underline{n}}$, $\hat{\underline{b}}$)

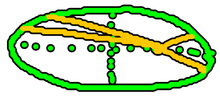
1.2 Newton's laws of dynamics (principle of inertia, $\underline{F} = \dot{\underline{p}}$, action equals reaction, superposition of forces)

1.3 Work and conservative forces ($W = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)$, $P = \frac{dW}{dt} = \underline{F}\cdot\underline{v}$, $T+V=E=\text{const.}$)

1.4 Harmonic oscillations ($\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$)

1.5 Forced oscillations (——— " ——— $= k_0 e^{i\omega t}$)

1.6 Central forces, conservation of angular momentum ($\underline{L} = \underline{r}\times\underline{p}$, $\underline{M} = \underline{r}\times\underline{F}$, $\frac{d}{dt}\underline{L} = \underline{M}$)

1.7 Kepler's laws ( , $T^2 \sim a^3$)

1.8 Relative motion ($\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{c}_0 + \underline{v}_0 t + \underline{\underline{R}}\,\underline{r}$, spatial/time transl., rotation, Galilei transform)

1.9 Accelerated coordinate systems ($\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + \dot{\underline{r}}' + \underline{\omega}\times\underline{r}$; $m\ddot{\underline{r}}' = m\ddot{\underline{r}} - m\ddot{\underline{r}}_0 - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') - 2m\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}' - m\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'$)

2. Analytische Mechanik

Mechanik als Grundlage der Theoretischen Physik

- Physikalische Grundbegriffe
- Paradigma einer physikalischen Theorie (mathematisch-geometrische Struktur der Dynamik)

Darstellung: Keine Mechanik von Flaschenzügen, masselosen Seilen, punktförmigen und reibungsfreien Masseküglchen, sondern Betonung des formalen Rahmens

- Symmetrien und Invarianzprinzipien
- geometrische Struktur
- Nichtlineare Theorie

- Grundlage für andere Theorien

⇒ Verallgemeinerte <u>Kanonische</u> Formulierung

- Lagrangesche Formulierung ⟶ Feldtheorien (E-Dynamik, Rel. Th.)
- Hamiltonsche Formulierung ⟶ Quantenmechanik, Statistik)

Im Folgenden: Extremalprinzipien

(Differentialprinzipien: D'Alembertsches Prinzip

Integralprinzipien : Hamiltonsches Prinzip

Mechanik des starren Körpers)

2.1 Das d'Alembertsche Prinzip

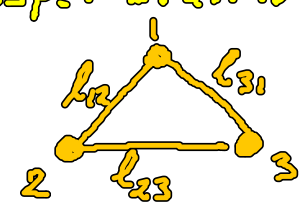
2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Ein System von N Massenpunkten hat $f = 3N$ Freiheitsgrade, wenn keine Zwangsbedingungen vorliegen.

Verringerung der Zahl der Freiheitsgrade durch:

(i) <u>holonome</u> („integrable") Zwangsbedingungen

Bsp.: starrer Körper aus 3 Teilchen



Zwangsbeding

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= |\underline{r}_1 - \underline{r}_2| - l_{12} = 0 \\ f_2 &= |\underline{r}_2 - \underline{r}_3| - l_{23} = 0 \\ f_3 &= |\underline{r}_3 - \underline{r}_1| - l_{31} = 0 \end{aligned}\right\} \quad f = 3N - \Lambda = 9 - 3 = 6$$

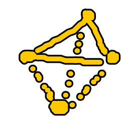
allgemein: Starrer Körper aus N Teilchen:

$f_\lambda = |\underline{r}_i - \underline{r}_j| - l_{ij} = 0$, $i,j = 1,2,\ldots,N$

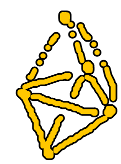
Diese Bedingungen sind nicht unabhängig!

N	hinzukommend.	Gesamtzahl Λ	$f = 3N - \Lambda$
1	0	0	3
2	1	1	5
3	2	3	6
4	3	6	6
5	3	9	6
⋮	⋮	⋮	⋮
$N \geq 4$	3	$3N-6$	6

$N=4$



$N=5$



beliebige Starrkörper

Die Bahnen $\underline{r}_i(t)$ sollen Λ unabhängigen Zwangsbedingungen erfüllen: $f_\lambda(\underline{r}_1(t), \underline{r}_2(t), \ldots, \underline{r}_N(t), t) = 0 \quad \forall t$

Totale Zeitableitung (längs Bahn):

$$\frac{df_\lambda}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{r_i} f_\lambda \cdot \underline{v}_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} = 0$$

Differentielle Schreibweise (vollständiges Differential):

$$df_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{r_i} f_\lambda \cdot d\underline{r}_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} dt = 0$$

(ii) Nichtholonome Zwangsbedingungen:

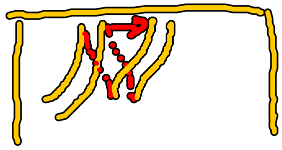
$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda i}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N, t) \cdot d\underline{r}_i + a_{\lambda 0}(\ldots)\, dt = 0 \qquad \lambda = 1, \ldots, \Lambda$$

Pfaffsche Differentialform, nicht integrable (es existiert kein integrierender Faktor g_λ, so dass $\sum_i g_\lambda \underline{a}_{\lambda i} \cdot d\underline{r}_i + g_\lambda a_{\lambda 0}\, dt = df_\lambda$, d.h. $g_\lambda \underline{a}_{\lambda i} = \nabla_{r_i} f_\lambda$)

$\Rightarrow$ Es sind beliebige Positionen $(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N)$ zulässige, jedoch sind die lokalen Bewegungen eingeschränkt.

Bsp.: Rangieren mit dem Auto auf einer freien Fläche.

Man kann jeden Punkt erreichen, momentan ist aber $d\underline{r}_i$ durch die Radrichtung bestimmt.



(Geschwindigkeit längs der Bahn $\underline{v}(t)$ ist eingeschränkt:
$$\sum_i \underline{a}_{\lambda i}\,\underline{v}_i + a_{\lambda 0} = 0)$$

(iii) Unterscheide in beide Fällen:
rheonome (zeitabhängige) Zwangsbedingungen
skleronome (nicht explizit zeitabhängige) "
[starr]

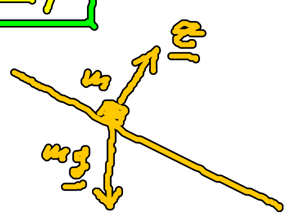
(iv) Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen
(z. B. Gas im Behälter mit Wänden)

Bewegungsgleichungen:
$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underset{\text{äußere}}{\underline{F}_i} + \underset{\text{innere}}{\sum_j \underline{F}_{ij}}}_{\text{Kräfte}} =: \underline{X}_i \qquad i = 1, \dots, N$$
eingeprägte Kräfte müssen unter den Nebenbedingungen
$$f_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0 \quad \text{(holonom)}$$
oder $\sum_i \underline{a}_{\lambda i}\,\underline{v}_i + a_{\lambda 0} = 0$ (nichtholonom)
gelöst werden.

Beschreibungswechsel: Nebenbedingungen sollen durch Zwangskräfte $\underline{Z}_i$ erzwungen werden.

$$\boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{X}_i + \underline{Z}_i} \qquad i = 1, \dots, N$$

Bsp.: schiefe Ebene



(Vgl. Newtonsche Mechanik mit Diskussion des Anteils der Gewichtskraft in Ausbreitungsrichtung)

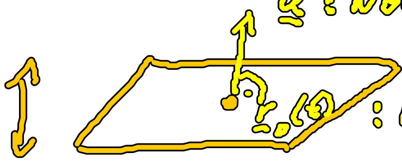
2.1.2 Virtuelle Verrückungen

Virtuelle Verrückung $\{\delta \underline{r}_i\}$: infinitesimale Änderung der Koordinaten, die zur festen Zeit ($\delta t = 0$) die holonome bzw. nichtholonomen Zwangsbed. erfüllen ($\longleftrightarrow$ reelle Verrückung $d\underline{r}_i$ im Zeitintervall dt längs Bahn)

$$\delta \mathrel{\hat{=}} \frac{\partial}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0}$$

$$\delta f_\lambda := \sum_{i=1}^{N} \nabla_{r_i} f_\lambda \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{i=1}^{N} a_{\lambda i}\, \delta \underline{r}_i = 0 .$$

Bsp.: Bewegung in Ebene $\underline{a}\cdot(\underline{r} - \underline{r}_0(t)) = 0$



holonome Zwangsbedingungen für N Massenpunkte

$$f(\underline{r}_i) = \underline{a}\cdot(\underline{r}_i - \underline{r}_0(t)) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

$$\hookrightarrow df = \underline{a}\cdot(d\underline{r}_i - \underline{v}_0(t)\,dt) = 0 \quad \text{mit } \underline{v}_0(t) := \frac{d}{dt}\underline{r}_0(t)$$

also i.a. $\underline{a}_i\, d\underline{r}_i = \underline{a}\cdot\underline{v}_0(t)\,dt \neq 0$

aber $\delta f = \underline{a}\cdot\delta\underline{r}_i = 0$, d.h. alle $\delta\underline{r}_i \perp \underline{a}$ bei festgehalt. $\underline{r}_0(t)$