# 2 Analytical mechanics

## 2.1 D'Alembert's principle

### 2.1.1 Constraints on the system (forces that prevent moving in certain directions

holonomic $f_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$, $df_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\underline{r}_i} f_\lambda \cdot d\underline{r}_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} dt = 0$

nonholonomic $\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda i}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) \cdot d\underline{r}_i + a_{\lambda 0}(\dots) dt = 0$

rheonomous: explicit dependence on time

scleronomous: no ——— " ———

equations of motion: $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{X}_i + \underline{Z}_i$ )

### 2.1.2 Virtual displacements $\{\delta \underline{r}_i\}$, $\delta \hat{=} \frac{\partial}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0}$ with $\epsilon$ describing a motion consistent with constraints

### 2.1.3 D'Alembertsches Prinzip der virtuellen Arbeit

Systemen von N Massenpunkten und holonomen oder nichtholonomen Zwangsbedingungen.

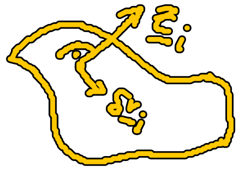
Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften $\underline{Z}_i$:

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{X}_i = \underline{Z}_i \qquad i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{X}_i) \cdot \delta \underline{r}_i}_{\text{virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte}} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i}_{\text{der Zwangskräfte}}$$

Bsp: Bewegung auf Fläche $f(\underline{r}_i, t) = 0$ $\left(\text{z.B. Ebene } = \underline{a} \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_0(t))\right)$

Ann.: Zwangskräfte $\perp$ Fläche



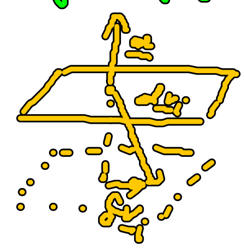

$$\underline{Z}_i = \lambda_i(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) \underbrace{\underline{\nabla}_{r_i} f}_{\text{z.B. } \underline{a} \text{ für Ebene}}$$

virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet:

$$\underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \lambda_i \underbrace{\underline{\nabla}_{r_i}}_{\perp \text{Fläche}} f \cdot \underbrace{\delta \underline{r}_i}_{\parallel \text{Fläche}} = \lambda_i \, \delta f = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

(aber reale Arbeit der Zwangskräfte i.a. $\sum \underline{Z}_i \cdot d\underline{r}_i \neq 0$)




Bsp.: Starrer Körper $f_\lambda = |\underline{r}_i - \underline{r}_j| - l_{ij} = 0$

Annahme: Zwangskräfte in Richtung $\underline{r}_i - \underline{r}_j$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{ij} = \lambda_{ij} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}}$$

3. Newtonsches Prinzip: $\underline{Z}_{ij} = -\underline{Z}_{ji} \Rightarrow \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$

Gesamte Zwangskraft auf $m_i$: $\underline{Z}_i = \sum_{j \neq i} \underline{Z}_{ij} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}}$

$$\underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}} \cdot \delta \underline{r}_i \neq 0 \quad (\text{i.a.})$$

Die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet nicht einzeln für jede Masse, aber

$$\sum_i \underline{Z}_i \cdot \delta\underline{r}_i = \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}} \cdot \delta\underline{r}_i$$

$$\frac{1}{2}\sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}} (\delta\underline{r}_i - \delta\underline{r}_j)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}} \cdot \delta\underline{r}_i - \frac{1}{2}\sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{-(\underline{r}_j - \underline{r}_i)}{r_{ij}} \cdot \delta\underline{r}_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} \lambda_{ij} \underbrace{\frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}} \cdot \delta(\underline{r}_i - \underline{r}_j)} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \lambda_{ij} \underbrace{\delta r_{ij}}_{=0} = 0$$

$= \delta r_{ij}$, da $\delta|\underline{r}| = \delta(\underline{r}\cdot\underline{r})^{1/2} = \frac{1}{2}(\underline{r}\cdot\underline{r})^{-\frac{1}{2}}\, 2\underline{r}\cdot\delta\underline{r} = \frac{\underline{r}}{r}\cdot\delta\underline{r}$

Allgemeine Forderung: $\boxed{\sum_i \underline{Z}_i \cdot \delta\underline{r}_i = 0}$ für alle betrachteten Zwangskräfte

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{X}_i)\cdot\delta\underline{r}_i = 0}$$ <u>d'Alembertsches Prinzip</u>

Beispiel für ein Variationsprinzip:

Differentialprinzip (infinitesimal kleine Variationen)

Der wirklich angenommene Zustand ist ein Extremalzustand in dem Sinn, dass die gesamte virtuelle Arbeit Null ist. Er ist stabil gegen kleine Verrückungen der Bahn $\delta\underline{r}_i$.

Variationsprinzip mit Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^{3N} (m_j \ddot{x}_j - K_j)\cdot\delta x_j = 0 \qquad \text{Nebenbed.} \sum_{j=1}^{3N} \phi_j^\mu \,\delta x_j = 0 \quad (\mu = 1,\dots,\Lambda)$$

Umnummerierung der Vektorkoordinaten: $\underline{r} \to x_j$, $\underline{X} \to K_j$, $\underline{a} \to \phi_j^\mu$

Lösung mit der Methode der <u>Lagrange-Multiplikatoren</u>

Falls $\delta x_j$ frei variierbar wären, würde $(m_j \ddot{x}_j - K_j) = 0$ gelten.

Ziel: Umschreiben des linearen Gleichungssystems, so dass ein Satz von Faktoren frei variierbar ist.

- Addiere Nebenbed. mit Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_\mu$:

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu\right)\delta x_j = 0 \qquad (*)$$

- Eliminiere $\delta x_1, \dots, \delta x_\Lambda$ aus den Nebenbedingungen. Dann sind in (*) $\delta x_{\Lambda+1}, \dots, \delta x_{3N}$ frei variierbar.

- Bestimme nun $\lambda_1, \dots, \lambda_\Lambda$, so dass

$$\left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu\right) = 0 \qquad \text{für } j = 1, \dots, \Lambda$$

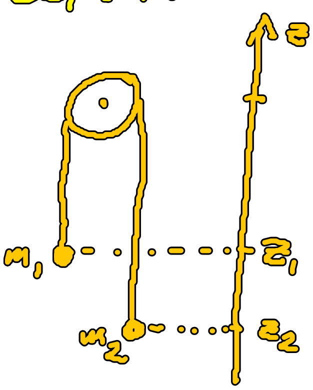
NB: lin. Gleichungssystem für $\lambda_\mu$ als Funktion $\ddot{x}_j$

$$\sum_{j=\Lambda+1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu\right) \underbrace{\delta x_j}_{\text{frei variierbar}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m_j \ddot{x}_j - K_j - \underbrace{\sum_\mu \lambda_\mu \phi_j^\mu}_{\text{Interpretation als Zwangskräfte}} = 0}$$

Lagrange-Gleichungen 1. Art

Bsp: Atwoodsche Fallmaschine




$$(m_1 \ddot{z}_1 - X_1)\,\delta z_1 + (m_2 \ddot{z}_2 - X_2)\,\delta z_2 = 0$$

$$X_1 = -m_1 g \quad , \quad X_2 = -m_2 g$$

Zwangsbedingung: $z_1 + z_2 = \text{const} \Rightarrow \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$

$$\delta z_1 = -\delta z_2$$

$$\Rightarrow \left[(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 + (m_1 - m_2) g\right] \delta z_1 = 0 \quad \text{für beliebige } \delta z_1$$

$$m_2 \ddot{z}_2\, \delta z_2 = m_2 (-\ddot{z}_1)(-\delta z_1) = m_2 \ddot{z}_1\, \delta z_1$$

$$\Rightarrow [\quad " \quad] = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}_1 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

## 2.1.4 Generalisierte Koordinaten

$\underline{r}_i(t)$: Trajektorien

Holonome Zwangsbedingungen $f_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$, $\lambda = 1, \dots, \Lambda$

$\Rightarrow$ Punktkoordinaten $\{\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N\}$ können nicht unabhängig variiert werden.

Ziel: (i) Suche einen Satz von $f = 3N - \Lambda$ unabhängigen generalisierten Koordinaten $\{q_1, \dots, q_f\}$

(ii) Aufstellung von Bewegungsgleichungen für die $\{q_1, \dots, q_f\}$ aus einfachen Extremalprinzipien.