

### 2.1.3 D'Alembert's principle of virtual work

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{X}_i) \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \delta \underline{r}_i = 0 \quad \begin{matrix} \underline{x} \rightarrow x_j, \underline{r} \rightarrow x_j, \underline{a} \rightarrow \phi_j' \end{matrix}$$

$$\text{Lagrange's equations of 1<sup>st</sup> kind: } m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\wedge} \lambda_{\mu}(t) \phi_j^{\mu} = 0$$

### 2.1.4 Generalized coordinates

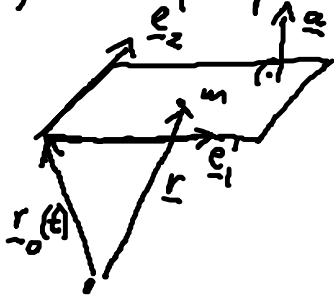
$$\{q_i\} = \{q_1, \dots, q_f\}, \quad f = 3N - \wedge \quad (\# \text{degrees of freedom})$$

Fortsetzung von 2.1.4

Die  $\{q_1, \dots, q_f\}$  sind frei variierbar!

Zwangsbedingungen sind identisch erfüllt  $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$

Bsp.: 1) Massenpunkt  $m$  auf der bewegten Ebene  $\underline{a} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0(t)) = 0$

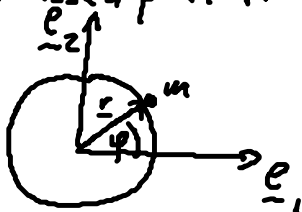


Mitbewegtes hartes Koordinatensystem  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$

$$\underline{r} = \underline{r}_0(t) + q_1 \underline{e}'_1 + q_2 \underline{e}'_2$$

$\Rightarrow$  generalisierte Koordinaten  $\{q_1, q_2\}$   
( $f=2$ )

2) Massenpunkt  $m$  auf Kreis mit Radius  $R$



$$|\underline{r}| = R \quad \underline{r} = R (\cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2)$$

$\Rightarrow q = \varphi \quad (f=1)$

Virtuelle Verschiebungen  $\delta \underline{r}_i$  durch  $\delta q_1, \dots, \delta q_f$  ausgedrückt:

$$\underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) \xrightarrow{\delta t=0} \delta \underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (1)$$

Vgl. reale Verschiebungen:  $\underline{v}_i = \frac{d}{dt} \underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$  (2)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \underline{v}_i(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) \quad (3)$$

Virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte:

$$\sum_i \underline{x}_i \cdot \delta \underline{r}_i \stackrel{(1)}{=} \sum_j \left\{ \sum_i \underline{x}_i \left( \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

verallgemeinerten Kräfte  $Q_j := \sum_i \underline{x}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}$

Falls  $\underline{x}_i$  konservativ:  $\underline{x}_i = -\nabla_{\underline{r}_i} V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$

$$\Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_i \left( \nabla_{\underline{r}_i} V \right) \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \underline{x}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

verallgemeinerte Kräfte haben auch ein Potenzial!

### 2.1.5 Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\text{Ziel: } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

D'Alembertsches Prinzip:  $\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum \underline{x}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j$

Linke Seite  $\stackrel{(1)}{=} \sum_j \left( \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \sum_j \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\underline{r}}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\underline{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j \quad (4)$

$$\text{Produktregel } (uv)' = u'v + u \cdot v'$$

$$\Leftrightarrow (uv)' - uv' = u'v$$

mit  $\underline{v}_i = \sum_j \left( \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$  folgt:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$  (5)

Denn:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \left( \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial t \partial q_j}$  (linke Seite)



speziell: konservative Kräfte  $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$V(q_1, \dots, q_f, t) = V(x_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, x_N(q_1, \dots, q_f, t), t)$$

$$\text{also } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0$$

stets für  $\{q_1, \dots, q_f\}$  usw.

Definiere Lagrange-Funktion:  $L(q_j, \dot{q}_j, t) = T - V$

(c)  $\Rightarrow$   $\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$  Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Kräfte

NB: (i)  $L$  ist nicht eindeutig festgelegt,  $L = T - V$  ist nur eine mögliche Form.

$$(ii) T(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2$$
$$= a + \sum_{j=1}^f b_j \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^f c_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Nur für skleronome Zwangsbedingungen ist  $T$  in  $\dot{q}_j$  eine homogene Bilinearform ( $a = b_j = 0$ )

Anwendungsschema der Lagrange-Gleichungen 2. Art:

(i) Auswahl der generalisierten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$ , die die (holonomen) Zwangsbedingungen identisch erfüllen:  $x_i = x_i(q_1, \dots, q_f, t)$

(ii) Berechne  $v_i(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{d}{dt} x_i(q_j, t)$  und daraus  $T(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$

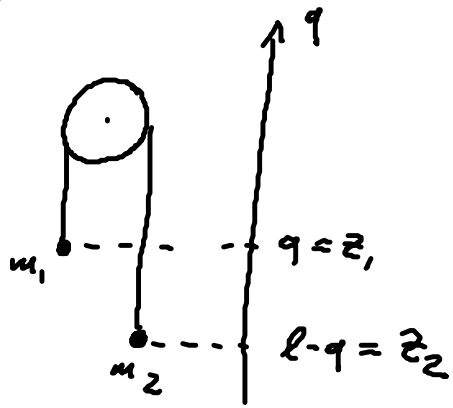
(iii) Für konservative Kräfte:  $V(q_j, t) = V(x_i(q_j, t), t)$

" nicht " Kräfte:  $Q_j = \sum_i x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$

(iv) Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Bsp: Atwoodsche Fallmaschine



(ii)-(iv)

$$\dots (m_1 + m_2) \ddot{q} + (m_1 - m_2) g = 0$$

Auflösung wegen