2.1.5 Lagrange's equations of 2nd kind

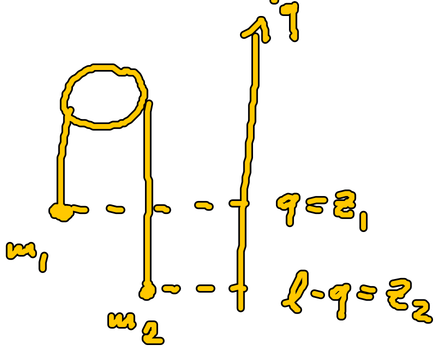
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , \quad j = 1, \dots, f$$

Lagrangian : $L = T - V$ (conservative forces)

T: kinetic energy, V: potential energy

Euler-Lagrange equations: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

solution to yesterday's example: Atwood's machine



generalized coordinate q

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot q^2 \\ V &= m_1 g q + m_2 g (l - q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = T - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -m_1 g + m_2 g \, , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot q} = (m_1 + m_2)\dot q$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot q + (m_1 - m_2) g = 0$$

2.1.6 Normalschwingungen

Anwendung: kleine Schwingungen eines Systems von Massenpunkten m_i
holonome, skleronome Zwangsbedingungen, Potenzial $V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$
mit stabiler Ruhelage.

Wähle generalisierte Koordinaten $q_1, \dots, q_f$ mit Ruhelage $q_1^{(0)} = \dots = q_f^{(0)} = 0$

Entwicklung der potenziellen Energie um die Ruhelage:

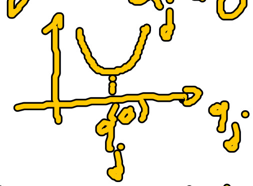
$$V(q_1, \dots, q_f) = \underbrace{V(0, \dots, 0)}_{\substack{\text{o.B.d.A.} \\ =\,0}} + \sum_{j=1}^{f} \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)_0}_{= -Q_j \overset{!}{=} 0} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0}_{=:V_{jk}} q_j q_k + \dots$$

(Skalenverschiebung der Energie)

Auswertung an Ruhelage

(verallgemeinerte Kräfte)

$(\underline{F} = -\underline{\nabla} V)$



Also in niedrigster Näherung (für kleine Schwingungen):

$$V(q_1, \dots, q_f) \approx \frac{1}{2} \sum_{j,k} V_{jk}\, q_j q_k \geq 0 \quad \text{mit } V_{jk} = V_{kj}$$

(positiv definite quadratische Form, da Ruhelage stabil)

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \geq 0$ mit $\underline{v}_i = \sum_j \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) \dot{q}_j$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} \sum_{jk} T_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k \geq 0 \qquad \text{(pos. def. quad. Form)}$$

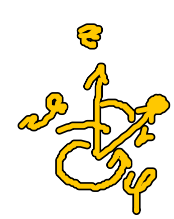
$$\text{mit } T_{jk} = T_{kj} \approx \sum_i m_i \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)_0 \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right)_0}$$

an der Ruhelage, in niedrigster (quadrat.) Näherung für kleine Schwingungen $(|\dot{q}| \approx \omega |q|)$

Lagrange-Funktion: $L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{jk} \left(T_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k - V_{jk}\, q_j q_k\right)$

[Einschub: Bemerkung zu T:

Abhängigkeit von q_j, z.B. Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)



$$T = \dots = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2\right)$$

s. Tutorium: Berechnung der T_{jk}

]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_l} = \frac{1}{2}\sum_{jk} T_{jk} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot q_l}(\dot q_j \dot q_k)}_{\underbrace{\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot q_l}}_{\delta_{jl}} \dot q_k + \dot q_j \underbrace{\frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_l}}_{\delta_{kl}}} = \frac{1}{2}\sum_k T_{lk}\dot q_k + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_j T_{jl}\dot q_j}_{\sum_k \underbrace{T_{kl}}_{=T_{lk}} \dot q_j} = \sum_k T_{lk}\dot q_k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_l} = \sum_k T_{lk}\ddot q_k$$

(hier, für kleine Schwingungen, T_{lk} unabhängig von q_k in niedrigster Näherung)

Analog gilt: $\frac{\partial L}{\partial q_l} = -\sum_k V_{lk} q_k$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $\sum_k (T_{lk}\ddot q_k + V_{lk} q_k) = 0 \quad , l = 1, \dots, f$
(linear!)

Lösungsansatz: $q_k(t) = A_k e^{i\omega t}$ mit $A_k \in \mathbb{C}$

einsetzen
$\Rightarrow \sum_k (V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) A_k = 0$ Eigenwertgleichung für ω^2
(homogenes lineares Gleichungssyst. für A_k)

Nichttriviale Lösung existiert genau dann, wenn

$\det(V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) = 0$ charakteristische Gleichung für ω^2
(Säkulargleichung, Polynom f-ten Grades)

Da V_{lk} und T_{lk} positiv definit sind, gilt $\omega^2 > 0$ für alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Lösungen: ω_α, $\alpha = 1, \dots, f$ (Eigenfrequenzen)

$A_k^{(\alpha)}$ (Eigenvektoren, nur bis auf Normierungsfaktor bestimmt)

allgemeine Lösung: $q_k(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{f} C_\alpha A_k^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t}\right\}$

(Bestimmung der $C_\alpha \in \mathbb{C}$ durch Anfangsbedingungen $q_k(0), \dot q_k(0)$)

<u>Normalkoordinaten</u>: Transformiere auf neue generalisierte

Koordinaten Q_α, so dass die Bewegungsgleichungen entkoppeln:

$$\boxed{\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha Q_\alpha = 0} \qquad \alpha = 1, \dots, f$$

Dies wird durch eine Hauptachsentransformation der symmetrischen Matrizen $V_{\ell k}$ und $T_{\ell k}$ geleistet.

Diagonalisierung durch Transformation mit (reell gewählten) Eigenvektoren $A_k^{(\alpha)}$:

$$q_k(t) = \sum_\alpha A_k^{(\alpha)} Q_\alpha(t)$$ mit Normalkoordinaten Q_α

($\underline{q} = \underline{\underline{A}}\, \underline{Q}$ in Vektorschreibweise mit $\underline{q}, \underline{Q} \in \mathbb{R}^f$)

Beweis, dass $V_{\ell k}$ und $T_{\ell k}$ durch $A_k^{(\alpha)}$ gleichzeitig auf Diagonalform gebracht werden:

$$\sum_k \left(V_{\ell k} - \omega_\alpha^2 T_{\ell k}\right) A_k^{(\alpha)} = 0 \qquad \Big| \cdot \sum_\ell A_\ell^{(\beta)} \qquad (1)$$

$$\sum_\ell \left(V_{k\ell} - \omega_\beta^2 T_{k\ell}\right) A_\ell^{(\beta)} = 0 \qquad \Big| \cdot \sum_k A_k^{(\alpha)} \qquad (2)$$

$$(1)-(2): \quad \sum_{k\ell} \underbrace{\left(V_{\ell k} - V_{k\ell}\right)}_{=0 \text{ (symm.)}} A_\ell^{(\beta)} A_k^{(\alpha)} - \left(\omega_\alpha^2 T_{\ell k} - \omega_\beta^2 T_{k\ell}\right) A_\ell^{(\beta)} A_k^{(\alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2\right)}_{\neq 0 \ (\alpha \neq \beta)} \underbrace{\sum_{k\ell} A_\ell^{(\beta)} T_{\ell k} A_k^{(\alpha)}}_{\tilde{T}^{\beta\alpha} \overset{!}{=} 0} = 0$$ für $\alpha \neq \beta$, transformierte kinetische Energie

Anm.: keine Entartung

$$\Rightarrow \sum_{k\ell} A_\ell^{(\beta)} T_{\ell k} A_k^{(\alpha)} = \delta_{\beta\alpha}$$ (geeignete Normierung der Eigenvektoren A_k für $\alpha = \beta$)

$$\Rightarrow \text{Zusammengefasst: } \sum_{k\ell} A_\ell^{(\beta)} V_{\ell k} A_k^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \sum_{k\ell} A_\ell^{(\beta)} T_{\ell k} A_k^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \delta_{\beta\alpha}$$

Also werden $T_{\ell k}$ und $V_{\ell k}$ gleichzeitig diagonalisiert.

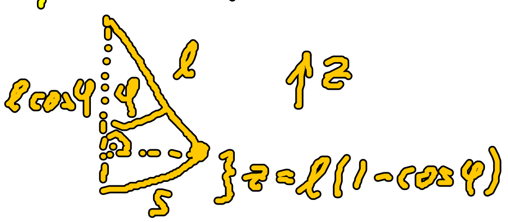
$$L = \frac{1}{2} \sum_{jk} \left(T_{jk}\, \dot q_j \dot q_k - V_{jk}\, q_j q_k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Big(\underbrace{\sum_{jk} A_j^{(\beta)} T_{jk} A_k^{(\alpha)}}_{\delta_{\beta\alpha}} \dot Q_\alpha \dot Q_\beta - \underbrace{\sum_{jk} A_j^{(\beta)} V_{jk} A_k^{(\alpha)}}_{\omega_\alpha^2 \delta_{\beta\alpha}} Q_\alpha Q_\beta \Big)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\dot Q_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \right)}$$

$\Rightarrow$ entkoppelte Bewegungsgl.: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot Q_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\alpha} = \ddot Q_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0$

Bsp.: (a) 1 Pendel



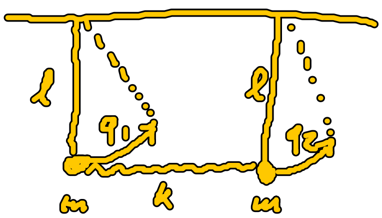
Verallgemeinerte Koordinate: $q := s = \varphi \ell$

$$T = \frac{1}{2} m \dot q^2$$

$$V \underset{\uparrow}{\approx} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right)_0 q^2 = \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} q^2$$

kleine Schwingungen

(b) 2 gekoppelte Pendel



generalisierte Koordinaten $q_1 = s_1$, $q_2 = s_2$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 \right)$$

$$V(q_1, q_2) \approx \ldots = \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} \left(q_1^2 + q_2^2 \right) + \frac{k}{2} (q_1 - q_2)^2$$

mit Berechnung von $T_{\ell k}$ und $V_{\ell k}$ folgen die Bewegungsgleichungen:

$$m \ddot q_1 + m \frac{g}{\ell} q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$m \ddot q_2 + m \frac{g}{\ell} q_2 \underbrace{- k(q_1 - q_2)} = 0$$

Kopplung der Gleichungen für q_1 und q_2

Lösungsansatz: $q_k = A_k e^{i\omega t}$

↳ Charakteristische Gleichung: $0 = \det\left(V_{ek} - \omega^2 T_{ek}\right)$

↳ Lösung für ω^2: $\omega_{1,2}^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \pm \frac{k}{m} = \begin{cases} \frac{g}{l} \\ \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \end{cases}$

Normalkoordinaten: $q_k(t) \sim A_k^{(1)} Q_1 + A_k^{(2)} Q_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(q_1 + q_2)$, $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(q_1 - q_2)$

Schwerpunktskoordinate Relativkoordinate