English Summary:

2.1.6 Normal modes

generalized coördinates $q_1, \dots q_f$

Lagrangian $L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{jk}(T_{jk}\dot q_j \dot q_k - V_{jk} q_j q_k)$

Lagrange equations $\sum_k (T_{\ell k}\ddot q_k + V_{\ell k} q_k) = 0$, $\ell = 1, \dots, f$

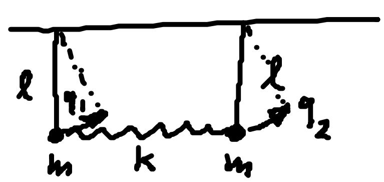
ansatz $q_k = A_k e^{i\omega t}$ $\Rightarrow$ eigenvalue problem for ω^2 $\Rightarrow$ diagonalization

transformation to normal coordinates Q_α: $\boxed{\ddot Q_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0}$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_\alpha (\dot Q_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)}$$

decoupled $\alpha = 1, \dots, f$

2 gekoppelte Pendel



generalisierte Koord. $q_1 = s_1$, $q_2 = s_2$

$$T = \frac{m}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2)$$

$$V(q_1, q_2) = mg\ell\left(1 - \cos\frac{q_1}{\ell}\right) + mg\ell\left(1 - \cos\frac{q_2}{\ell}\right) + \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2$$

$$\approx \frac{m}{2}\frac{g}{\ell}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2$$

$$T_{\ell k} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad V_{\ell k} = \begin{pmatrix} m\frac{g}{\ell} + k & -k \\ -k & m\frac{g}{\ell} + k \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{q}_1 + m\frac{g}{\ell}q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + m\frac{g}{\ell}q_2 - \underbrace{k(q_1 - q_2)}_{\text{Kopplung}} = 0$$

Lösungsansatz $q_k = A_k e^{i\omega t}$

char. gl. $0 = \det\left(V_{\ell k} - \omega^2 T_{\ell k}\right) = m^2 \det\begin{pmatrix} \frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}-\omega^2 \end{pmatrix}$

$$0 = \omega^4 - 2\omega^2\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right) + \left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right) \pm \frac{k}{m} = \begin{cases} \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m} \end{cases}$$

Eigenfrequenzen $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} =: \omega_0$ ungestörte Pendelfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}} =: \sqrt{\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}^2}$$

Eigenvektoren $\left(m\frac{g}{\ell} + k - m\omega_\alpha^2\right)A_1^{(\alpha)} - kA_2^{(\alpha)} = 0$

zu ω_1 : $kA_1^{(1)} - kA_2^{(1)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu ω_2 : $-kA_1^{(2)} - kA_2^{(2)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normierung so, dass $\sum_{k\ell} A_\ell^{(\alpha)} T_{\ell k} A_k^{(\alpha)} = m\sum_k |A_k^{(\alpha)}|^2 \overset{!}{=} 1$

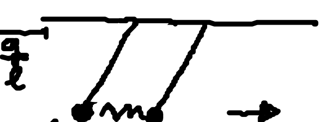
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Normalschwingungen

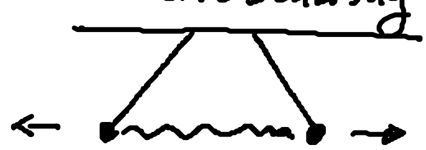
$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(q_1 + q_2)$ Schwerpkts.schwing.

$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(q_1 - q_2)$ Relativschwing.

$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$



gleichphasig



$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}}$

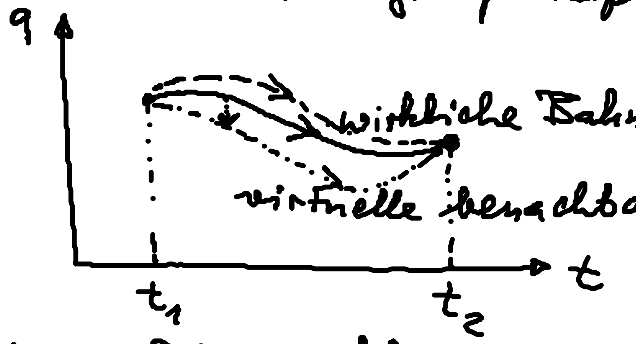
gegenphasig

2.2 Das Hamilton'sche Prinzip

2.2.1 Variationsprinzipien

Bisher differenzielle Variationen $\delta \underline{r}_i$ → d'Alembert'sches Prinzip

jetzt: Variation der ganzen Bahn $\underline{r}_i(t)$ → Hamilton'sches Prinzip (Integralprinzip)



Idee: Die wirklich angenommene Bahn zeichnet sich dadurch aus, dass sie eine bestimmte Größe („Wirkung") extremal macht.

Beispiel: Fermat'sches Prinzip der geometrischen Optik (Lichtstrahl sucht sich den kürzesten Weg in einer Anordnung von Spiegeln und brechenden Gläsern mit Brechungsindex $n(\underline{r}) = \frac{c}{c_0}$: $\delta \int_1^2 ds\, n(\underline{r}) = 0$)

Teilchen im kräftefreien Fall: bewegt sich auf Geodäten (Linien kürzester Entfernung zwischen 2 Punkten, z.B. auf Kugel: Großkreise)

Allg. Relativitätstheorie: Massenverteilungen verzerren die Metrik des Raumes so, dass alle Teilchenbahnen Geodäten werden.

Allg. Aufgabe der Variationsrechnung:

Sei $I : C^2 \to \mathbb{R}$ ein Funktional

$$q(t) \mapsto I[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt\; F(q(t), \dot q(t), t)$$

(2x stetig diff.bare reelle Fkt.)

Suche $q(t)$ so, dass $\boxed{\delta I[q] \overset{!}{=} 0}$ I extremal (Max., Min. oder Sattel)

Variierte Bahnen:

Zu jedem t aus $t_1 \le t \le t_2$ wird dem Pkt. $q(t)$ auf der realen Bahn ein variierter Bahnpkt. $q'(t)$ zugeordnet mit:

(i) $q'(t) \in C^2$

(ii) $\delta q(t) := q'(t) - q(t)$ differenzielle Variation

(iii) $\boxed{\delta t = 0}$ Zeit nicht variiert

(iv) $q'(t_1) = q(t_1)$ Anfangs-
$q'(t_2) = q(t_2)$ End- Punkt fest $\Rightarrow \boxed{\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0}$

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\; F(q, \dot q, t) \overset{(iv)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt\; \delta F(q, \dot q, t) \overset{(iii)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot q}\delta \dot q\right]$$

Variierte Geschwindigkeit $\boxed{\delta \dot q = \dot q' - \dot q = \frac{d}{dt}(q' - q) = \frac{d}{dt}\delta q}$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt\; \frac{\partial F}{\partial \dot q}\left(\frac{d}{dt}\delta q\right) \overset{\text{part. Int.}}{=} -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)\delta q + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot q}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2}}$$

Also

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q} \right] \underbrace{\delta q}_{\text{frei variierbar}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q} = 0}$$ <u>Euler-Lagrange-Dgl. der Variationsrechnung</u>

Differenzialgl. ist äquivalent zum <u>Integralprinzip</u> <u>$\delta I[q] = 0$</u>

<u>Bem.</u>: Die Dgl. lässt sich auch durch direkten Ansatz mit Var. par. α gewinnen [Scheck: Mechanik]

$$q(t,\alpha) = q(t) + \alpha\,\eta(t)$$ Parametrisierung der konkurrierenden Fkt.en durch α mit festem $\eta(t)$

(direkte Methode der Variationsrechnung)

2.2.2 Hamilton'sches Wirkungsprinzip

Voraussetz.:

(i) Holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ ex. generalisierte Koord. $q_1, \dots q_f$

(ii) Konservative Kräfte $\Rightarrow$ ex. Lagrangefkt.

$$L(q_1 \dots q_f, \dot q_1 \dots \dot q_f, t) = T - V$$

Setze $F = L(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, t)$

und verallgemeinere das Variationsprinzip auf mehrere Var.:

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Dgl. $\hat{=}$ Lagrange-Gln. 2. Art

Integralprinzip $\hat{=}$ Hamilton'sches Wirkungsprinzip

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta W = 0 \\ &W := \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_1(t) \dots \dot{q}_1(t) \dots, t) \end{aligned}}$$

Wirkungsfunktional

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k(t) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k(t) \overset{!}{=} 0$$

für beliebige freie Variationen $\delta q_k(t)$, $k = 1, \dots, f$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

Lagrange-Gln. 2. Art

Beispiel: 1-dim. harmon. Osz.

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \delta \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2 \right\} \qquad \begin{aligned} \delta \dot{q}^2 &= 2\dot{q}\,\delta\dot{q} \\ \delta q^2 &= 2q\,\delta q \end{aligned}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ m\dot{q}\,\delta\dot{q} - m\omega^2 q\,\delta q \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -m\ddot{q} - m\omega^2 q \right\} \delta q \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Unterschiede zum d'Alembert-Prinzip

- Hamilton'sches Prinzip ist Integralprinzip (integrierte Summe der Var. extremal, tatsächliche Bahn mit diff. benachbarten Bahnen verglichen)
- teleologisches Prinzip: auf einen Zweck gerichtet (gesamte Bahn)
- unabhängig von der Koord.wahl

[Wirkung] = [Energie] × [Zeit]
= [Impuls] × [Ort]
(vgl. Planck'sches Wirkungsquantum $\hbar$)

NB: Verallgemeinerung auf nichtholonome Zwangsbed. u. nicht konservative eingeprägte Kräfte

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} dt\,(\delta T + \delta A) = 0} \qquad \delta A = \sum_i \underline{X}_i \cdot \delta \underline{r}_i$$