

## English Summary:

### 2.1.6 Normal modes

generalized coordinates  $q_1, \dots, q_f$

$$\text{Lagrangian } L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{j,k} (T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - V_{jk} q_j q_k)$$

$$\text{Lagrange equations } \sum_k (T_{lk} \ddot{q}_k + V_{lk} q_k) = 0, \quad l=1, \dots, f$$

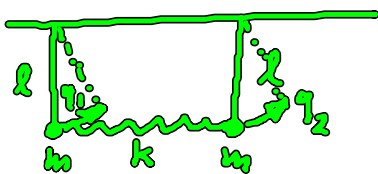
ansatz  $q_k = A_k e^{i\omega t} \Rightarrow$  eigenvalue problem for  $\omega^2 \Rightarrow$  diagonalization

$$\text{transformation to normal coordinates } Q_\alpha: \ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)$$

decoupled  $\alpha=1, \dots, f$

## 2 gekoppelte Pendel



generalisierte Koord.  $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$V(q_1, q_2) = mgl(1 - \cos \frac{q_1}{l}) + mgl(1 - \cos \frac{q_2}{l}) + \frac{k}{2} (q_1 - q_2)^2$$
$$\approx \frac{m}{2} \frac{g}{l} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{k}{2} (q_1 - q_2)^2$$

$$T_{lk} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad V_{lk} = \begin{pmatrix} m \frac{g}{l} + k & -k \\ -k & m \frac{g}{l} + k \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{q}_1 + m\frac{g}{l}q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + m\frac{g}{l}q_2 - k(q_1 - q_2) = 0$$

Kopplung

Lösungsansatz  $q_k = A_k e^{i\omega t}$

char. gl.  $0 = \det(V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) = m^2 \det \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}$

$$0 = \omega^4 - 2\omega^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \pm \frac{k}{m} = \begin{cases} \frac{g}{l} \\ \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \end{cases}$$

Eigenfrequenzen  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} =: \omega_0$  ungestörte Pendelfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} =: \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta^2}$$

Eigenvektoren  $(m\frac{g}{l} + k - m\omega_k^2)A_1^{(k)} - kA_2^{(k)} = 0$

zu  $\omega_1$ :  $kA_1^{(1)} - kA_2^{(1)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu  $\omega_2$ :  $-kA_1^{(2)} - kA_2^{(2)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

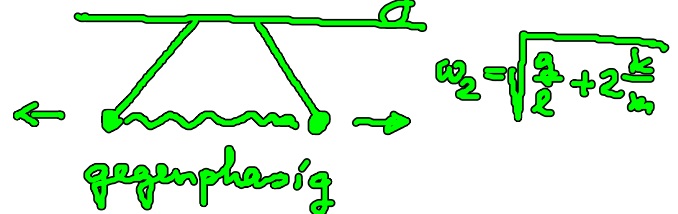
Normierung so, dass  $\sum_{kl} A_k^{(k)} T_{lk} A_l^{(k)} = m \sum_k |A_k^{(k)}|^2 \stackrel{!}{=} 1$   
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

Normalschwingungen

$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (q_1 + q_2)$   
 Schwerpunktschwingung.



$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (q_1 - q_2)$   
 Relativschwingung.



## 2.2 Das Hamilton'sche Prinzip

### 2.2.1 Variationsprinzipien

Bisher: differenzielle Variationen  $\delta r_i \rightarrow$  d'Alembert'sches Prinzip  
jetzt: Variation der ganzen Bahn  $r_i(t) \rightarrow$  Hamilton'sches Prinzip  
(Integralprinzip)



Idee: Die wirklich angenommene Bahn zeichnet sich dadurch aus, dass sie eine bestimmte Größe („Wirkung“) extrem macht.

Beispiel: Fermat'sches Prinzip der geometrischen Optik

(Lichtstrahl sucht sich den kürzesten Weg in einer Anordnung von Spiegeln und brechenden Gläsern mit Brechungsindex  $n(z) = \frac{c}{v}$ :  $\delta \int ds n(z) = 0$ )

Teilchen im kräftefreien Fall: bewegt sich auf Geodäten (Linien kürzester Entfernung zwischen 2 Punkten, z.B. auf Kugel: Großkreise)

Allg. Relativitätstheorie: Massenverteilungen vereinen die Metrik des Raumes  $\sim 0$ , dass alle Teilchenbahnen Geodäten werden.

# Allg. Aufgabe der Variationsrechnung:

Sei  $I: C^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional

$$q(t) \mapsto I[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt F(q(t), \dot{q}(t), t)$$

(2x stetig  
diff. stark  
reelle Fkt.)

Suche  $q(t)$  so, dass  $\delta I[q] = 0$   $I$  extremal  
(Max., Min. oder Sattel)

## Varierte Bahnen:

Zu jedem  $t$  aus  $t_1 \leq t \leq t_2$  wird dem fest.  $q(t)$  auf der realen Bahn ein variertes Bahnpkt.  $q'(t)$  zugeordnet mit:

(i)  $q'(t) \in C^2$

(ii)  $\delta q(t) := q'(t) - q(t)$  differentielle Variation

(iii)  $\delta t = 0$  Zeit nicht variiert

(iv)  $q'(t_1) = q(t_1)$  Anfangs - Punkt fest  $\Rightarrow \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$   
 $q'(t_2) = q(t_2)$  End -

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt F(q, \dot{q}, t) \stackrel{(iv)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \delta F(q, \dot{q}, t) \stackrel{(iii)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]$$

Varierte Geschwindigkeit  $\delta \dot{q} = \dot{q}' - \dot{q} = \frac{d}{dt}(\dot{q}' - \dot{q}) = \frac{d}{dt} \delta \dot{q}$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \left( \frac{d}{dt} \delta \dot{q} \right) \stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Also

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right] \delta q$$

frei variierbar

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0}$$

Euler-Lagrange-Dgl.  
der Variationsrechnung

Differenzialgl. ist äquivalent zum Integralprinzip  
 $\delta I[q] = 0$

Bem.: Die Dgl. lässt sich auch durch direkten Ansatz mit Var. par.  $\alpha$  gewinnen [siehe: Mechanik]

$$q(t, \alpha) = q(t) + \alpha \zeta(t)$$

Parametrisierung  
des konkurrierenden  
Fkt.en durch  $\alpha$   
mit festen  $q(t)$   
(direkte Methode der Variationsrechnung)

## 2.2.2 Hamilton'sches Wirkungsprinzip

Voraussetz.:

- (i) Holonome Zwangsbed.  $\Rightarrow$  ex. generalisierte Koord.  $q_1, \dots, q_f$
- (ii) Konservative Kräfte  $\Rightarrow$  ex. Lagrange fkt.  
 $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - V$

Setze  $F = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$

und verallgemeinere das Variationsprinzip auf mehrere Var.:

$\Rightarrow$  Euler-Lagrange-Gl.  $\hat{=}$  Lagrange-Gln. 2. Art

Integralprinzip  $\hat{=}$  Hamilton'sches Wirkungsprinzip

Wirkungsfunktional

$$\delta W = 0$$
$$W := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), \dots, t)$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k(t) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k(t) \stackrel{!}{=} 0$$

für beliebige freie Variationen  $\delta q_k(t)$ ,  $k=1, \dots, f$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \right.$$

Lagrange-Gln. 2. Art

Beispiel: 1-dim. harmon. Osz.

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2 \right\} \quad \begin{aligned} \delta \dot{q}^2 &= 2\dot{q} \delta \dot{q} \\ \delta q^2 &= 2q \delta q \end{aligned}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \{ m\dot{q} \delta \dot{q} - m\omega^2 q \delta q \}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \{ -m\ddot{q} - m\omega^2 q \} \delta q \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

## Unterschiede zum d'Alembert-Prinzip

- Hamilton'sches Prinzip ist Integralprinzip  
(integrierte Summe der Var. extremal,  
tatsächliche Bahn mit diff. benachbarte Bahnen  
vergleichen)
- teleologisches Prinzip: auf einen Zweck gerichtet  
(gesamte Bahn)
- unabhängig von der Koord.wahl

$$[\text{Wirkung}] = [\text{Energie}] \times [\text{Zeit}]$$

$$= [\text{Impuls}] \times [\text{Ort}]$$

(vgl. Planck'sches Wirkungsquantum  $h$ )

NB: Verallgemeinerung auf nieltholonome Zwangsbed.  
u. nicht konservative eingesetzte Kräfte

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) = 0$$

$$\delta A = \sum_i \mathbf{x}_i \cdot \delta \mathbf{z}_i$$