English Summary:

3. Continuous Symmetries and Conservation Laws

3.1 Noether's Theorem

Autonomous system, invariant under continuous transformation $\underline{q} \longrightarrow \underline{h}^s(\underline{q})$.

$$\Rightarrow \boxed{I(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\substack{\text{generalized}\\ \text{momentum}}} \underbrace{\left(\frac{d}{ds} h_i^s(\underline{q})\right)_{s=0}}_{\substack{\text{generator of}\\ \text{infinitesimal transf.}}}}$$

is integral of motion

3.2 Spatial translational invariance (no force in q_1-direction)

transl. invar. $\Longrightarrow$ momentum conservation

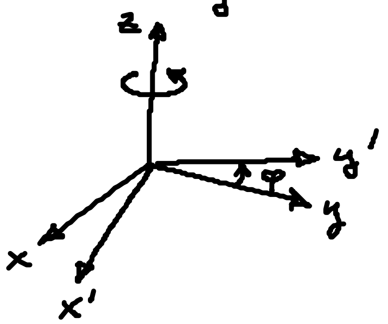
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = p_1 = \text{const.}}$$

$q_1 = s$ is cycle variable — conjugate generalized momentum conserved

3.3 Räumliche Isotropie

konservative Kräfte, keine Zwangsbed.

Drehung des Bezugssystems um die z-Achse um den Winkel $\varphi = s$:



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{h}^s: \quad & \underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \longrightarrow \underline{r}_i' = (x_i', y_i', z_i')^T \\ \text{mit} \quad & x_i' = x_i \cos s + y_i \sin s \\ & y_i' = -x_i \sin s + y_i \cos s \\ & z_i' = z_i \end{aligned}}$$

<u>Rotationsinvarianz</u> für Drehung um z-Achse:

infinitesimale Transformation (Drehung um kleinen Winkel s):

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix um z-Achse}} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Taylorreihe} \\ \text{für } s \ll 1}}{\approx} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{-s \mathbb{J}_z \\ \text{Erzeugende}}} \right] \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

<u>Erzeugende</u> für infinitesimale Drehungen um z-Achse

$$= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + s(\underline{r}_i \times \underline{e}_z)$$

formal:

$$\underline{r}_i' = \underbrace{\underline{h}^s(\underline{r}_i)\Big|_{s=0}}_{\underline{r}_i} + s\left(\frac{d}{ds}\underline{h}^s(\underline{r}_i)\right)_{s=0} + O(s^2)$$

mit $\boxed{\left(\frac{d}{ds}\underline{h}^s(\underline{r}_i)\right)_{s=0} = \underline{r}_i \times \underline{e}_z}$

$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2$ ist rotationsinvariant, da nur von $|\dot{\underline{r}}_i|$ abhängig und da Drehmatrix Abstände nicht ändert (<u>orthog.</u> Trafo)

<u>Rotationsinvarianz der Lagrange-Fkt.</u>:

$$L(\underline{r}_i' = \underline{h}^s(\underline{r}_i), \dot{\underline{r}}_i) \overset{!}{=} L(\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i)$$

$$\left(\frac{dL}{ds}\right)_{s=0} = -\left(\frac{dV}{ds}\right)_{s=0} = -\sum_{i=1}^{N} \underbrace{(\underline{\nabla}_{\underline{r}_i'} V)}_{-\underline{F}_i} \underbrace{\left(\frac{d\underline{r}_i'}{ds}\right)_{s=0}}_{\left(\frac{d\underline{h}^s}{ds}\right)_{s=0}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot (\underline{r}_i \times \underline{e}_z)$$

$$\overset{\text{zykl. Permut.}}{=} \underline{e}_z \cdot \sum_i (\underline{F}_i \times \underline{r}_i) = -\underline{e}_z \cdot \underbrace{\sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i}_{\text{gesamtes Drehmoment}} \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow$ z-Komponente des <u>äußeren resultierenden Drehmom.</u> $= 0$

NB: Falls Rotationsinvarianz f. <u>alle</u> Achsen gilt $\Leftrightarrow \underline{F}_i \parallel \underline{r}_i$

$\Leftrightarrow$ <u>Zentralkraft</u>

Noether'sches Theorem:

Integral der Bewegung $I = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \left(\frac{d h^s}{ds} \right)_{s=0}$

$$= \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot (\underline{r}_i \times \underline{e}_z)$$

$$\stackrel{\text{zykl.}}{=} \underline{e}_z \cdot \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \times \underline{r}_i$$

$$= - \underline{e}_z \underbrace{\sum_i (\underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i)}_{\text{Drehimpuls } \underline{\ell}} = -\ell_z$$

Also: $\boxed{\text{Rotationsinvarianz}} \Rightarrow \boxed{\text{Drehimpulserhaltung}}$

Andere Betrachtungsweise:

Wähle $q_1 = s = \varphi$ als verallg. Koordinate.

Trafo: $\underline{r}_i = \underline{r}_i(\varphi, q_2, \dots, q_f, t)$

mit $\frac{\partial}{\partial q_1} \underline{r}_i = \left(\frac{d}{ds} h^s(\underline{r}_i) \right)_{s=0} = \underline{r}_i \times \underline{e}_z$ für infinites. Drehung um z-Achse

Invarianz				Erhaltungssatz
$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0$	$\Leftrightarrow$	$\boxed{p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const}}$

d.h. φ ist zykl. Var.

zu $q_1 = \varphi$ gehöriger verallgem. konjug. Impuls:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{\underline{r}}_i^2 = \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \underbrace{\frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial \dot{q}_1}}_{\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_1}}$$

da $\dot{\underline{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$

$$= \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i (\underline{r}_i \times \underline{e}_z)$$

$$\stackrel{\text{zykl.}}{=} - \underline{e}_z \sum_i (\underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i) = -\ell_z$$

(z-Komp. des Drehimpulses)

<u>NB</u>: Hier betrachten wir <u>passive</u> Drehung des Koord.syst.!

Äquivalent: Aktive Drehung des Massenpktes.

mit $\tilde{\varphi} = -\varphi$

$\Rightarrow$ dazu konjug. Impuls $+ l_z$

<u>Beispiel</u>: N Teilchen mit innerer Paarwechselwirkung, die nur vom <u>Abstand</u> abhängt:

$$V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) = V(r_{12} \dots \; r_{ij} \dots) \quad \text{mit } r_{ij} = |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \sum_{ij} \frac{\partial V}{\partial r_{ij}} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \varphi} r_{ij}}_{\otimes} \overset{!}{=} 0 \quad \text{für bel. Achse, da:}$$

$$\otimes \; \frac{\partial}{\partial \varphi} r_{ij} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\underline{r}_i - \underline{r}_j)(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \right]^{1/2} = \frac{1}{r_{ij}} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underline{r}_i - \underline{r}_j)$$

$$= \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}} \cdot \Big(\underbrace{\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \varphi}}_{\underline{r}_i \times \underline{e}_k} - \underbrace{\frac{\partial \underline{r}_j}{\partial \varphi}}_{\underline{r}_j \times \underline{e}_k} \Big)$$

$$= \frac{1}{r_{ij}} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot \left[(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{e}_k \right]$$

$$= \frac{1}{r_{ij}} \underline{e}_k \left[(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \right] = 0$$

Also ist der resultierende Drehimpuls $\underline{l}$ eine Erhalt.größe (3 Integrale der Bewegung)

<u>Erzeugende der infinitesimalen Drehung um z-Achse</u>

Die infinites. Drehung lässt sich schreiben als

$$\boxed{\underline{r}_i' = \underline{h}^s(\underline{r}_i) = (1 - s \underline{\underline{J}}_z) \underline{r}_i}$$ mit der <u>Erzeugenden</u>

$$\underline{\underline{J}}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Drehung um endlichen Winkel φ:

$$\underline{r}_i' = \underline{\underline{R}}_z(\varphi)\,\underline{r}_i \qquad \text{mit } \underline{\text{Drehmatrix}}\ \underline{\underline{R}}_z(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\boxed{\underline{\underline{R}}_z(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_z \varphi)}$

(Exponentialfkt. einer Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist definiert durch Reihe
$$\exp \underline{\underline{A}} = 1 + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}} + \ldots \frac{1}{k!}\underline{\underline{A}}^k + \ldots$$)

<u>Beweis</u>: Für $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt
$$\underline{\underline{M}}^2 = -1$$
$$\underline{\underline{M}}^3 = -\underline{\underline{M}}$$
$$\underline{\underline{M}}^4 = 1$$

also
$$\underline{\underline{M}}^{2n} = (-1)^n \underline{1}$$
$$\underline{\underline{M}}^{2n+1} = (-1)^n \underline{\underline{M}}$$

Mit den Taylorreihen für sin und cos ist dann

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\varphi^{2n} - \underline{\underline{M}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\varphi^{2n+1}$$

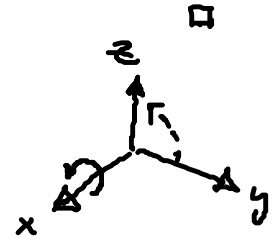
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\underline{\underline{M}}^{2n}\varphi^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\underline{\underline{M}}^{2n+1}\varphi^{2n+1}$$

$$= \exp(-\underline{\underline{M}}\varphi)$$

□

Analog: <u>Drehung um x-Achse</u>

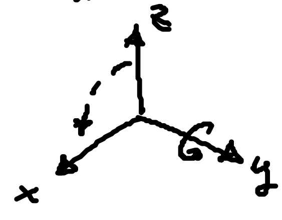
Erzeugende $\underline{\underline{J}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Drehmatrix $\underline{\underline{R}}_x(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_x\varphi)$

<u>Drehung um y-Achse</u>

Erzeugende $\underline{\underline{J}}_y = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & -1 \\ \quad\quad 1 & \end{array}$



Drehmatrix $\underline{\underline{R}}_y(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_y\varphi)$

Beliebige Drehung um Winkel φ und Drehachse $\underline{n}$:

$$\underline{\underline{R}}(\underline{\varphi}) = \exp\left(-\varphi \sum_{i=1}^{3} n_i \underline{\underline{J}}_i\right) \qquad \underline{\varphi} := \varphi \underline{n}$$

<u>NB</u> : Die Drehmatrizen $\underline{\underline{R}}(\underline{\varphi})$ bilden eine 3-parametrige $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ stetige, diff.bare (in φ) orthogonale Gruppe (<u>Lie-Gruppe</u>) in 3 reellen Dimensionen:

= kontin. Gruppe

$$SO(3) = \{ \underline{\underline{R}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ linear} \mid \underbrace{\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = 1}_{\substack{\text{orthogonal} \\ (\|\underline{r}'\| = \|\underline{r}\|)}} , \underbrace{\det \underline{\underline{R}} = +1}_{\substack{\text{keine} \\ \text{Raum-} \\ \text{spiegelung}}} \}$$

Die Erzeugenden $\underline{\underline{J}}_i$ der Drehgruppe bilden eine <u>Lie-Algebra</u> mit dem Lie'schen Produkt (= <u>Kommutator</u>)

$$\left[\underline{\underline{J}}_i , \underline{\underline{J}}_k\right] := \underline{\underline{J}}_i \underline{\underline{J}}_k - \underline{\underline{J}}_k \underline{\underline{J}}_i \qquad i,k = x,y,z$$

2 Drehungen um verschiedene Achsen vertauschen nicht, d.h. das Ergebnis hängt von der Reihenfolge ab :

$$\left.\begin{aligned} \left[\underline{\underline{J}}_x , \underline{\underline{J}}_y\right] &= \underline{\underline{J}}_z \\ \left[\underline{\underline{J}}_z , \underline{\underline{J}}_x\right] &= \underline{\underline{J}}_y \\ \left[\underline{\underline{J}}_y , \underline{\underline{J}}_z\right] &= \underline{\underline{J}}_x \end{aligned}\right\} \text{ zykl. Permutationen}$$