

English Summary:

3. Continuous Symmetries and Conservation Laws

3.1 Noether's Theorem

Autonomous system, invariant under continuous transformation $q \rightarrow h^s(q)$.

$$\Rightarrow \mathcal{I}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{ds} h_i^s(\underline{q}) \right)_{s=0} \text{ is integral of motion}$$

generalized generator of momentum infinitesimal transf.

3.2 Spatial translational invariance (no force in q -direction)

transl. invar. \Rightarrow momentum conservation

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = p_1 = \text{const.}$$

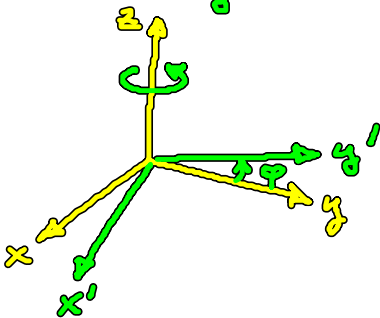
$q_1 = s$ is cycle variable

conjugate generalized momentum conserved

3.3 Räumliche Isotropie

konservative Kräfte, keine Zwangsked.

Drehung des Bezugssystems um die z -Achse um den Winkel $\varphi = s$:



$$\underline{h^s} : \underline{\Gamma}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \rightarrow \underline{\Gamma}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)^T$$

mit

$$x'_i = x_i \cos s + y_i \sin s$$
$$y'_i = -x_i \sin s + y_i \cos s$$
$$z'_i = z_i$$

Rotationsinvarianz für Drehung um z-Achse:

infinitesimale Transformation (Drehung um kleinen Winkel s):

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix um z-Achse}} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \stackrel{\text{Taylorreihe für } s \ll 1}{\approx} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{-s \mathbb{J}_z} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + s(\underline{r}_i \times \underline{e}_z)$$

Erzeugende für infinitesimale Drehungen um z-Achse

formal:

$$\underline{r}_i' = \underbrace{h^s(\underline{r}_i)}_{\underline{r}_i} \Big|_{s=0} + s \left(\frac{d}{ds} h^s(\underline{r}_i) \right) \Big|_{s=0} + O(s^2)$$

mit $\boxed{\left(\frac{d}{ds} h^s(\underline{r}_i) \right) \Big|_{s=0} = \underline{r}_i \times \underline{e}_z}$

$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^2$ ist rotationsinvariant, da nur von $|\dot{\underline{r}}_i|$ abhängig und da Drehmatrix Abstände nicht ändert (orthog. Trafo)

Rotationsinvarianz der Lagrange-Fkt.:

$$L(\underline{r}_i' = \underline{h}^s(\underline{r}_i), \dot{\underline{r}}_i) \stackrel{!}{=} L(\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i)$$

$$\left(\frac{dL}{ds} \right) \Big|_{s=0} = - \left(\frac{dV}{ds} \right) \Big|_{s=0} = - \sum_{i=1}^N \underbrace{(\nabla_{\underline{r}_i'} V)}_{-\underline{F}_i} \underbrace{\left(\frac{d\underline{r}_i'}{ds} \right) \Big|_{s=0}}_{\left(\frac{d\underline{h}^s}{ds} \right) \Big|_{s=0}} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot (\underline{r}_i \times \underline{e}_z)$$

zykl. Permut.

$$= \underline{e}_z \cdot \sum_i (\underline{F}_i \times \underline{r}_i) = - \underline{e}_z \cdot \underbrace{\sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i}_{\text{gesamtes Drehmoment}} \stackrel{!}{=} 0$$

\Leftrightarrow z-Komponente des äußeren resultierenden Drehmom. = 0

NB: Falls Rotationsinvarianz f. alle Achsen gilt $\Leftrightarrow \underline{F}_i \parallel \underline{r}_i$

\Leftrightarrow Zentralkraft

Noether'sches Theorem:

Integral der Bewegung $I = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{d\mathbf{b}^s}{ds} \right)_{s=0}$

$$= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_z)$$

$$\stackrel{\text{cycl.}}{=} \mathbf{e}_z \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{r}_i$$

$$= -\mathbf{e}_z \cdot \underbrace{\sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i)}_{\text{Drehimpuls } \underline{L}} = -L_z$$

Also: Rotationsinvarianz \Rightarrow Drehimpulserhaltung

Andere Betrachtungsweise:

Wähle $q_1 = s = \varphi$ als verallg. Koordinate.

Trafo: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\varphi, q_2, \dots, q_f, t)$

mit $\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{r}_i = \left(\frac{d}{ds} \mathbf{h}^s(\mathbf{r}_i) \right)_{s=0} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_z$ für infinites. Drehung um z-Achse

Invarianz

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0$

Erhaltungssatz

$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const}$

d.h. φ ist cycl. Var

Zu $q = \varphi$ gehöriger verallg. konjug. Impuls:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_1}$$

$$= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_z)$$

$$\stackrel{\text{cycl.}}{=} -\mathbf{e}_z \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = -L_z$$

(z-Komp. des Drehimpulses)

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_1} \quad \text{da } \mathbf{r}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

NB: hier betrachten wir passive Drehung des Koord. syst.!

Äquivalent: Aktive Drehung des Massensystems.

mit $\tilde{\varphi} = -\varphi$

\Rightarrow dazu konjug. Impuls + L_z

Beispiel: N Teilchen mit innerer Paarwechselwirkung,
die nur von Abstand abhängt:

$$V(r_1, \dots, r_N) = V(r_{12} \dots r_{ij} \dots) \text{ mit } r_{ij} = |r_i - r_j|$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \sum_{ij} \frac{\partial V}{\partial r_{ij}} \cdot \underbrace{\frac{\partial r_{ij}}{\partial \varphi}}_{\textcircled{*}} = 0 \quad \text{für bel. Achse, da:}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} [(r_i - r_j) \cdot (r_i - r_j)]^{1/2} = \frac{1}{r_{ij}} (r_i - r_j) \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_i - r_j) \\ &= \frac{r_i - r_j}{r_{ij}} \left(\underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial \varphi}}_{r_i \times e_k} - \underbrace{\frac{\partial r_j}{\partial \varphi}}_{r_j \times e_k} \right) \\ &= \frac{1}{r_{ij}} (r_i - r_j) \cdot [(r_i - r_j) \times e_k] \\ &= \frac{1}{r_{ij}} e_k [(r_i - r_j) \times (r_i - r_j)] = 0 \end{aligned}$$

Also ist der resultierende Drehimpuls L eine Erhaltungsgröße
(3 Integrale der Bewegung)

Erzeugende der infinitesimalen Drehung um z-Achse

Die infinites. Drehung lässt sich schreiben als

$$\boxed{r'_i = \underline{L}^z(r_i) = (1 - s \underline{J}_z) r_i} \quad \text{mit der Erzeugenden}$$
$$\underline{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Drehung um endlichen Winkel φ :

$$\underline{r}'_i = \underline{R}_z(\varphi) \underline{r}_i \quad \text{mit Drehmatrix } \underline{R}_z(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\underline{R}_z(\varphi) = \exp\left(-\underline{J}_z \varphi\right)$

(Exponentialfkt. einer Matrix \underline{A} ist definiert durch Reihe)
 $\exp \underline{A} = \underline{1} + \underline{A} + \frac{1}{2} \underline{A} \cdot \underline{A} + \dots + \frac{1}{k!} \underline{A}^k + \dots$

Beweis: Für $\underline{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\underline{M}^2 = -\underline{1}$

$$\underline{M}^3 = -\underline{M}$$

$$\underline{M}^4 = \underline{1}$$

also $\underline{M}^{2n} = (-1)^n \underline{1}$

$$\underline{M}^{2n+1} = (-1)^n \underline{M}$$

Mit den Taylorreihen für \sin und \cos ist dann

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \underline{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n} - \underline{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}$$

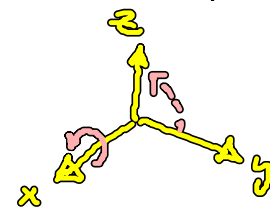
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \underline{M}^{2n} \varphi^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \underline{M}^{2n+1} \varphi^{2n+1}$$

$$= \exp(-\underline{M}\varphi)$$

□

Analog: Drehung um x-Achse

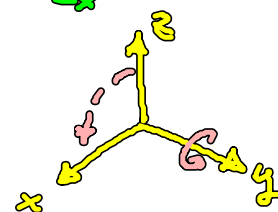
Erzeugende $\underline{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Drehmatrix $\underline{R}_x(\varphi) = \exp(-\underline{J}_x \varphi)$

Drehung um y-Achse

Erzeugende $\underline{J}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Drehmatrix $\underline{R}_y(\varphi) = \exp(-\underline{J}_y \varphi)$

Beliebige Drehung um Winkel φ und Drehachse \underline{n} :

$$\underline{R}(\varphi) = \exp\left(-\varphi \sum_{i=1}^3 n_i \underline{J}_i\right) \quad \varphi := \varphi \underline{n}$$

NB: Die Drehmatrizen $\underline{R}(\varphi)$ bilden eine
3-parametrig ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) stetige, diff. bar (in φ)
orthogonale Gruppe (Lie-Gruppe)
in 3 reellen Dimensionen: = kontin. Gruppe

$$SO(3) = \left\{ \underline{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ linear} \mid \underline{R}^T \underline{R} = \mathbb{1}, \det \underline{R} = +1 \right\}$$

orthogonal keine
($\|\underline{x}\| = \|\underline{R}\underline{x}\|$) Raum-
spiegelung

Die Erzeugenden \underline{J}_i der Drehgruppe bilden eine
Lie-Algebra mit dem Lie'schen Produkt (= Kommutator)

$$[\underline{J}_i, \underline{J}_k] := \underline{J}_i \underline{J}_k - \underline{J}_k \underline{J}_i \quad i, k = x, y, z$$

2 Drehungen um verschiedene Achsen
vertauschen nicht, d.h. das Ergebnis hängt
von der Reihenfolge ab :

$$\left. \begin{aligned} [\underline{J}_x, \underline{J}_y] &= \underline{J}_z \\ [\underline{J}_z, \underline{J}_x] &= \underline{J}_y \\ [\underline{J}_y, \underline{J}_z] &= \underline{J}_x \end{aligned} \right\} \text{cycl. Permutationen}$$