English summary:

3.3 Spatial isotropy

rotational invariance $\Rightarrow$ conservation of angular momentum

cyclic variable $q_1 = \varphi = s$, $\dfrac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_1} = \left(\dfrac{d}{ds} h^s(\underline{r}_i)\right)_{s=0} = \underline{r}_i \times \underline{e}_z$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \iff p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const.}$$

$$p_1 = \ldots = -\underline{e}_z \sum_i (\underline{r}_i \times m \dot{\underline{r}}_i) = -l_z$$

generating matrix of infinitesimal rotation around the z-axis

$$\underline{\underline{J}}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and in analogy } \underline{\underline{J}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{J}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ cyclic permutations: $[\underline{\underline{J}}_i, \underline{\underline{J}}_k] := \underline{\underline{J}}_i \underline{\underline{J}}_k - \underline{\underline{J}}_k \underline{\underline{J}}_i = \underline{\underline{J}}_l$, $(ikl) = (123)$ $\{123, 231, 312\}$

3.4 Zeitliche Translationsinvarianz

Die Zeit spielt in der klassischen Mechanik ($\leftrightarrow$ relativistische Mechanik) gegenüber dem Ort eine Sonderrolle.
Deshalb direkte Anwendung des Noetherschen Theorems nicht möglich. (autonome Systeme)

Zeitliche Translationsinvarianz erfüllt, falls:

(i) Zwangsbedingungen dürfen t nicht explizit enthalten

$$\Rightarrow \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \ldots, q_f), \quad \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

(ii) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$

NB: Aus der Existenz eines Potenzials der eingeprägten Kräfte folgt nicht automatisch die Erhaltung der Energie $E = T + V$, da die Zwangsbedingungen die Zeit explizit enthalten könnten.
$(\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t))$

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{f} T_{jk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k$

mit $T_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right)$ abhängig von $q_1, \dots, q_f$

(Vgl. Kapitel über kleine Schwingungen)

T ist eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$

also $T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_f) = \lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

Bilde $\frac{\partial}{\partial \lambda}$, dann $\lambda = 1$ setzen:

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_k)} \left.\frac{\partial(\lambda \dot{q}_k)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = 2\lambda T\Big|_{\lambda=1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\, \dot{q}_k = 2T \qquad \text{(Eulerscher Satz)}$$

Da V unabhängig von $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ ist, gilt auch mit $L = T - V$:

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, \dot{q}_k = 2T \qquad (*)$$

Totale Zeitableitung von L:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}\dot{q}_k\right) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0 \text{ wegen (iii)}}$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k\right)$$

$$\underset{\text{Produktregel}}{=} \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) \underset{(*)}{=} 2\frac{d}{dt}T$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(2T - L) = \frac{d}{dt}(2T - (T - V)) = \frac{d}{dt}(T + V)$$

$\Rightarrow T + V = \text{const.}$

Somit: $\boxed{\text{Zeittranslationsinvarianz}} \Rightarrow \boxed{\text{Energieerhaltung}}$

$\boxed{\text{skleronome Zwangsbedingungen}, \ \frac{\partial L}{\partial t} = 0} \Rightarrow \boxed{E = T + V = \text{const.}}$

3.5 Das Zweikörperproblem

Anwendung der Erhaltungssätze zur Lösung der Bewegungsgleichungen!

Idee: f Freiheitsgrade $\Rightarrow f$ Dgl. 2. Ordnung

$\Rightarrow 2f$ Integrationskonstanten (Anfangsbedingungen),

d.h. es existieren $2f$ Integrale der Bewegung

$$I_r(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = c_r \qquad (r = 1, \dots, 2f)$$

Falls alle I_r bekannt wären, wäre das Problem gelöst:

$$q_k = q_k(c_1, \dots, c_{2f}, t).$$

Ziel ist, möglichst viele Integrale der Bewegung zu finden.

Beispiel: Zweikörperproblem (2 Massen m_1, m_2 unter dem Einfluss einer inneren Wechselwirkung $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$: Zentralpot.)

Erhaltungssätze: Zahl der Freiheitsgrade $f = 6 \Rightarrow 12$ Integrale der Bewegung

(i) $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ ist translationsinvariant

$\Rightarrow$ Impuls: $\underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{const}$

Schwerpunkt: $\underline{R} = \frac{1}{M}\underline{P}t + \underline{R}_0$ (folgt aus $M\dot{\underline{R}} = \underline{P} = \text{const}$)
$M = m_1 + m_2$

(Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig)

$\Rightarrow 6$ Integrationskonstanten $\underline{P}, \underline{R}_0$

(ii) $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ ist rotationsinvariant

$\Rightarrow$ Drehimpuls $\underline{L} = m_1 \underline{r}_1 \times \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \underline{r}_2 \times \dot{\underline{r}}_2 = \text{const.}$

$\Rightarrow$ 3 Integrationskonstanten $\underline{L}$

(iii) zeitliche Translationsinvarianz, konservative Kraft

$\Rightarrow$ <u>Energie</u>: $E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 + V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) = \text{const.}$

$\Rightarrow$ 1 Integrationskonstante E

Insgesamt <u>10 Integrale der Bewegung</u> gefunden.

Es bleiben $12 - 10 = 2$ Integrationskonstanten
($\hat{=}$ Nullpunkt von Zeit- und Winkelskala)

3.5.1 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Lagrange-Formulierung: $L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 - V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$

Verallgemeinerte Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} := \underline{R} = \frac{1}{M}(m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2)$$ Schwerpunktskoordinate

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} := \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$ Relativkoordinate

Umkehrung: $\underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{M} \underline{r}$, $\underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{M} \underline{r}$

$\dot{\underline{r}}_1 = \dot{\underline{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\underline{r}}$, $\dot{\underline{r}}_2 = \dot{\underline{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\underline{r}}$

Einsetzen in Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{M}{2} \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - V(r)$$

reduzierte Masse $m := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad r := |\underline{r}|$

$\underline{R}$ ist zyklisch $\left(\frac{\partial L}{\partial R_\alpha} = 0 \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_\alpha} = M \dot{R}_\alpha = P_\alpha = \text{const.}$

$\Rightarrow \underline{R} = \frac{1}{M} \underline{P} t + \underline{R}_0$

Verwende das Schwerpunktsystem als Inertialsystem! (oBdA $\underline{R} = \dot{\underline{R}} = 0$)

without loss of generality

ohne Beschränkung der Allgemeinheit

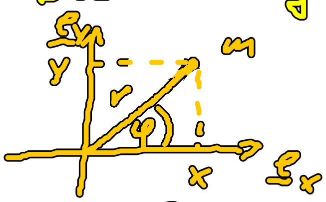
$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - V(r)}$$ mit $\underline{r}_1 = \frac{m_2}{M}\underline{r}$, $\underline{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\underline{r}$, $\dot{\underline{r}}_1 = \frac{m_2}{M}\dot{\underline{r}}$, $\dot{\underline{r}}_2 = -\frac{m_1}{M}\dot{\underline{r}}$

Drehimpuls: $\underline{l} = m_1 \underline{r}_1 \times \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \underline{r}_2 \times \dot{\underline{r}}_2 = \left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}\right)\underline{r}\times\dot{\underline{r}}$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{red. Masse}}}{m}\, \underline{r}\times\dot{\underline{r}} = \text{const.}$$ (wegen Rotationsinvarianz)

$\Rightarrow \underline{l}\cdot\underline{r} = 0$, $\underline{l}\cdot\dot{\underline{r}} = 0$, d.h. $\underline{r}$ und $\dot{\underline{r}}$ in Ebene $\perp \underline{l}$ (im Schwerpunktsystem)

Beschreibung durch Polarkoordinaten (oBdA $\underline{l} \parallel z$-Achse)



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{\underline{r}}^2 = \ldots = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Neue verallgemeinerte Koordinaten statt x, y: r, φ

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)}$$

φ ist zyklisch $\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \underset{\uparrow}{l} = \text{const.}$

$l = l_z$, da $l_x = l_y = 0$

$l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m r^2 \dot{\varphi}$

Flächensatz (2. Keplersches Gesetz)

geometrische Interpretation von $m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$:

Der Radiusvektor $\underline{r}$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, d.h. die Flächengeschwindigkeit ist konstant.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{2m} = \text{const.}$$