English summary

3.4 Temporal translational invariance

(i) $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f)$, $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0$ (ii) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

temporal translational invariance $\Rightarrow$ conservation of energy

scleronomous constraints, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\Rightarrow E = T + V = \text{const.}$

3.5 Two-body problem

f degrees of freedom $\Rightarrow$ f differential equations of 2^{nd} order

$\Rightarrow$ find integrals of motion

10 integrals given by
- spatial translational invariance (3+3) — central mass, momentum
- temporal " " (1) energy
- rotational invariance (3) angular momentum

3.5.1 Conservation of momentum and angular momentum

$$L = \frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - V(r), \quad \frac{\partial L}{\partial R_K} = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - V(r)$$

reference frame of center of mass

polar coordinates: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

φ cyclic variable $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \ell = \text{const.}$, Kepler's 2^{nd} law

3.5.2 Energieerhaltung und Bahngleichung

Lagrange-Gleichungen 2. Art für r: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - V'(r)$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \underbrace{m r \dot{\varphi}^2}_{\text{Zentrifugalkraft}} + V'(r) = 0$$

Elimination von $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{m r^2}$ mittels der Bewegungskonstante ℓ:

$$\boxed{m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m r^3} + V'(r) = 0}$$

Integral der Bewegung : Energie

Multiplikation mit $\dot{r}$ und $\int dt$

$$\underbrace{m\dot{r}\ddot{r}}_{=\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2\right)} + \frac{\ell^2}{m}\underbrace{\left(-\frac{\dot{r}}{r^3}\right)}_{=\frac{d}{dt}\frac{1}{2r^2}} + \underbrace{\dot{r}V'(r)}_{=\frac{d}{dt}V(r)} = 0$$

aus Produkt- und Kettenregeln

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}}_{=T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)} + V(r) = E = \text{const.}}$$ Energieerhaltung

Andere Interpretation: 1-dimensionale Bewegung im 1-dimensionalen effektiven Radialpotenzial.

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \tilde{V}(r) \quad \text{mit } \tilde{V}(r) := V(r) + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{\text{Zentrifugalbarriere}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \tilde{V}(r) = E}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \tilde{V}(r)\right)}$$

Trennung der Variablen und Integration (s. Kap. 1.6) führt zur Bahngleichung $\left(\text{Trick: } \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2\sqrt{\frac{2m}{\ell^2}\left(E - \tilde{V}(r)\right)}\right)$:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{\frac{2m}{\ell^2}\left(E - \tilde{V}(r')\right)}} \Rightarrow \varphi = \varphi(r) \Rightarrow r = r(\varphi)$$

3.5.3 Planetenbewegung und Keplersche Gesetze (Wiederholung)

Betrachte speziell Gravitationspotenzial als Wechselwirkung

$$V(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}, \quad r = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$$

Effektives Radialpotenzial: $\tilde{V} = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}, \quad k := \gamma m_1 m_2 > 0$

$$r \to 0 : \tilde{V}(r) \sim \frac{\ell^2}{2mr^2} \to \infty$$

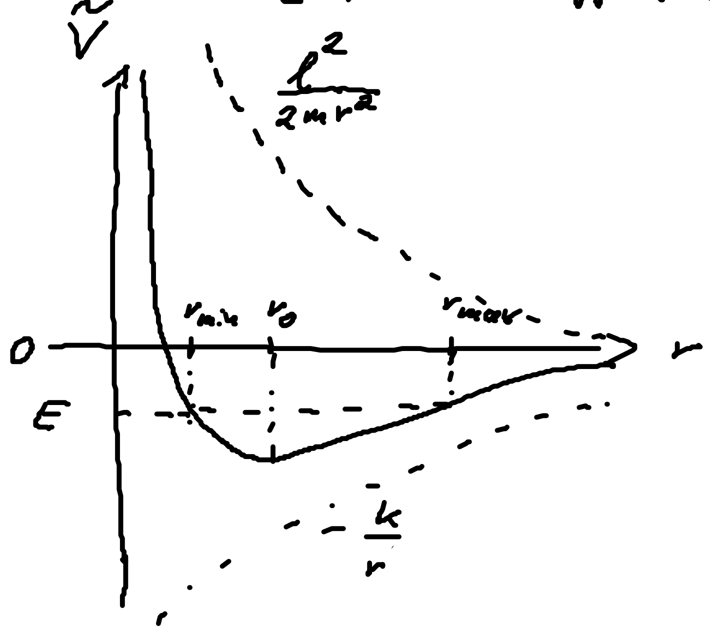
$r \to \infty: \tilde{V}(r) \sim -\frac{k}{r} \to 0$

Minimum: $\frac{d\tilde{V}}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{2\ell^2}{2mr^3} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\ell^2}{mk}, \tilde{V}(r_0) = -\frac{mk^2}{2\ell^2}$

Wegen $\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - \tilde{V}(r)$ ist eine Bewegung nur für $\tilde{V}(r) < E$ möglich, insbesondere für $E > \tilde{V}(r_0)$

$-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$: geschlossene Bahnen

$E > 0$: offene Bahnen



Für $-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$ sind die Umkehrpunkte durch $\tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} = E$ bestimmt:

$$r_{min/max} = \frac{1}{2|E|}\left(k \mp \sqrt{k^2 - \frac{2\ell^2|E|}{m}}\right)$$

Für $E > 0$ ergibt sich immer 1 Umkehrpunkt: $r_{min} = \frac{1}{2E}\left(\sqrt{k^2 + \frac{2\ell^2 E}{m}} - k\right)$

Bahngleichung: $$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{\frac{2m}{\ell^2}(E - \tilde{V}(r))}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mk}{\ell^2 r'} - \frac{1}{r'^2}}}$$

Lösen der Bahngleichung (s. Kap. 1.7) mittels geschickter quadratischer Ergänzung $\left(D := \frac{2m}{\ell^2}\left(\frac{mk^2}{2\ell^2} + E\right)\right)$ und Substitution:

$$\varphi = \varphi(r) \Rightarrow \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{mk}{\ell^2} + \sqrt{D}\cos\varphi = \frac{mk}{\ell^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi) \qquad (*)$$

mit $\varepsilon := \sqrt{D}\frac{\ell^2}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$

(*) ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten:

$\varepsilon > 1 \quad : E > 0$ Hyperbel (offene Bahn)

$\varepsilon = 1 \quad : E = 0$ Parabel (" ")

$\varepsilon < 1 \quad : -\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$ Ellipse (geschlossene Bahn)

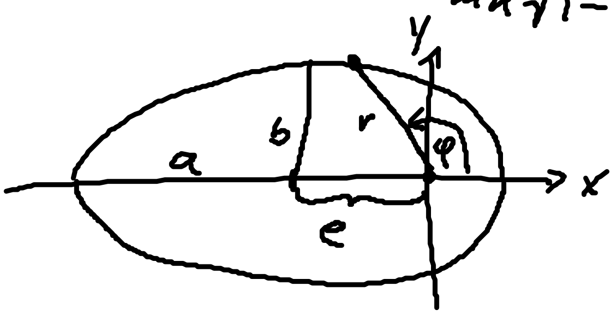
Umrechnung auf kartesische Koordinaten durch $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

für $\varepsilon < 1$ (Ellipse): $\boxed{\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ Exzentrizität

Gleichung eine Ellipse, deren einer Brennpunkt im Ursprung liegt.

Hauptachsen: $a = \frac{\ell^2}{mk(1-\varepsilon^2)} = \frac{k}{2|E|}$

$$b = \frac{\ell^2}{mk\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2m|E|}}$$



$\varepsilon = \frac{e}{a}$ numerische Exzentrizität

1. keplersches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

3. Keplersches Gesetz: $T^2 \sim a^3$ (T: Umlaufzeit, a: große Hauptachse)

Beweis Kap. 1.7 (Zusammenhang mit Flächensatz)

$$F = \pi ab = \int_0^T \frac{dF}{dt}\,dt = \frac{\ell}{2m} T \ \ldots$$

4. Der Hamiltonsche kanonische Formalismus

Motivation: Die Lagrange-Theorie benutzt als dynamische Variablen die verallgemeinerten Koordinaten q_k und deren Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$:

$$L(q_1,\dots,q_f,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_f,t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad , k=1,\dots,f$$

f Dgln. 2. Ordnung für $q_k(t)$ im Lagrange-Formalismus

Für gewisse Problemstellungen (z.B. wenn es zyklische Variablen gibt: $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.}$) und für bestimmte Erweiterungen der Theorie ($\rightarrow$ Quantenmechanik, statistische Mechanik) ist es vorteilhaft, statt $q_k, \dot{q}_k$ die Variablen q_k und die zu q_k konjugierten <u>verallgemeinerten Impulse</u> $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ zu benutzen.

Diese Variablentransformation $(q_k, \dot{q}_k, t) \rightarrow (q_k, p_k, t)$ leistet die <u>Legendre-Transformation</u>.

Es ergeben sich $2f$ Dgln. 1. Ordnung für $q_k(t), p_k(t)$ im <u>Hamilton-Formalismus</u>.