

English summary

3.4 Temporal translational invariance

$$(i) \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_k), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad (ii) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

temporal translational invariance \Rightarrow conservation of energy
scleronomic constraints, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + V = \text{const.}$

3.5 Two-body problem

f degrees of freedom $\Rightarrow f$ differential equations of 2nd order

\Rightarrow find integrals of motion

10 integrals given by - spatial translational invariance (3+3)

- temporal " " (1) Energy

- rotational invariance (3) angular momentum

3.5.1 Conservation of momentum and angular momentum

$$L = \frac{M}{2} \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - V(r), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_k} = 0 \Rightarrow \underline{L} = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - V(r)$$

polar coordinates: $L = \frac{m}{2} (r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$ reference frame of center of mass

φ cyclic variable $\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \ell = \text{const.}$, Kepler's 2nd law

3.5.2 Energieerhaltung und Bahngleichung

Lagrange-Gleichungen 2. Art für r : $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - V'(r)$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} - \underbrace{m r \dot{\varphi}^2}_{\text{Zentrifugalkraft}} + V'(r) = 0$$

Zentrifugalkraft

Elimination von $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{m r^2}$ mittels der Bewegungskonstante ℓ :

$$m \ddot{r} - \frac{\ell^2}{m r^3} + V'(r) = 0$$

Integral der Bewegung: Energie

Multiplikation mit \dot{r} und $\int dt$

$$m \dot{r} \ddot{r} + \frac{\ell^2}{m} \left(-\frac{\dot{r}}{r^3} \right) + \dot{r} V'(r) = 0$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2m} \frac{\ell^2}{r^2} = \frac{d}{dt} V(r) \quad \text{aus Produkt- und Kettenregel}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E = \text{const.}} \quad \text{Energieerhaltung}$$
$$= T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

Andere Interpretation: 1-dimensionale Bewegung im 1-dimensionalen effektiven Radialpotential.

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \tilde{V}(r) \quad \text{mit } \tilde{V}(r) := V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Barrierepotential

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \tilde{V}(r) = E}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - \tilde{V}(r))}$$

Trennung der Variablen und Integration (s. Kap. 1.6) führt zur Bahn Gleichung (Trick: $\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \sqrt{\frac{2m}{\ell^2} (E - \tilde{V}(r))}$):

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{\ell^2} (E - \tilde{V}(r'))}} \Rightarrow \varphi = \varphi(r) \Rightarrow r = r(\varphi)$$

3.5.3 Planetenbewegung und Keplersche Gesetze (Wiederholung)

Betrachte speziell Gravitationspotential als Wechselwirkung

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}, \quad r = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$$

Effektives Radialpotential: $\tilde{V} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$, $\kappa := \gamma m_1 m_2 > 0$

$$r \rightarrow 0: \tilde{V}(r) \sim \frac{\ell^2}{2mr^2} \rightarrow \infty$$

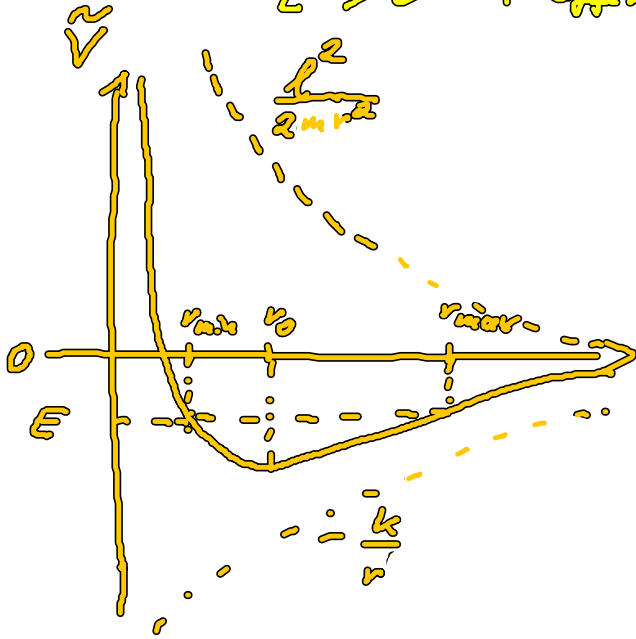
$$r \rightarrow \infty : \tilde{V}(r) \sim -\frac{k}{r} \rightarrow 0$$

$$\text{Minimum: } \frac{d\tilde{V}}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{2\ell^2}{2mr^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\ell^2}{mk}, \tilde{V}(r_0) = -\frac{mk^2}{2\ell^2}$$

Wegen $\frac{m}{2} \dot{r}^2 = E - \tilde{V}(r)$ ist eine Bewegung nur für $\tilde{V}(r) < E$ möglich, insbesondere für $E > \tilde{V}(r_0)$

$$-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0 : \text{geschlossene Bahnen}$$

$$E > 0 : \text{offene Bahnen}$$



Für $-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$ sind die Umkehrpunkte

$$\text{durch } \tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} = E \text{ bestimmt:}$$

$$r_{\min/\max} = \frac{1}{2|E|} \left(k \pm \sqrt{k^2 - 2\ell^2|E|} \right)$$

Für $E > 0$ ergibt sich immer 1 Umkehrpunkt: $r_{\min} = \frac{1}{2E} \left(\sqrt{k^2 + 2\ell^2 E} - k \right)$

$$\begin{aligned} \text{Bahngleichung: } \varphi - \varphi_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{\ell^2} (E - \tilde{V}(r))}} \\ &= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mk}{\ell^2 r'} - \frac{1}{r'^2}}} \end{aligned}$$

Lösen der Bahngleichung (s. Kap. 1.7) mittels geschickter quadratischer Ergänzung ($D := \frac{2m}{\ell^2} \left(\frac{mk^2}{2\ell^2} + E \right)$) und Substitution:

$$\varphi = \varphi(r) \Rightarrow \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{mk}{\ell^2} + \sqrt{D} \cos \varphi = \frac{mk}{\ell^2} (1 + \epsilon \cos \varphi) \quad (\otimes)$$

$$\text{mit } \epsilon := \sqrt{D} \frac{\ell^2}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

⊗ ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten:

$\epsilon > 1$: $E > 0$ Hyperbel (offene Bahn)

$\epsilon = 1$: $E = 0$ Parabel (" ")

$\epsilon < 1$: $-\frac{mk^2}{2l^2} < E < 0$ Ellipse (geschlossene Bahn)

Umrechnung auf kartesische Koordinaten durch $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

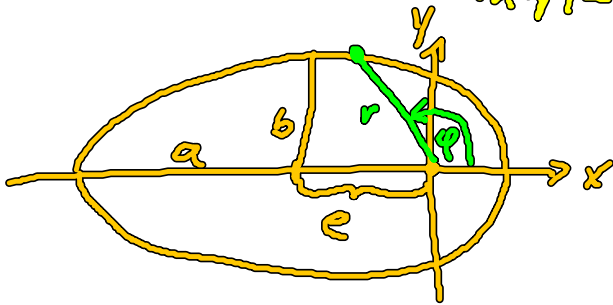
für $\epsilon < 1$ (Ellipse):

$$\boxed{\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{mit } c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{Exzentrizität}$$

Gleichung einer Ellipse, deren einer Brennpunkt kt im Ursprung liegt.

Hauptachsen $a = \frac{l^2}{mk(1-\epsilon^2)} = \frac{l}{2l\epsilon}$

$$b = \frac{l^2}{mk\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\epsilon|\epsilon|}}$$



$$\epsilon = \frac{e}{a} \quad \text{numerische Exzentrizität}$$

1. Keplersches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in denen einem Brennpunkt die Sonne steht.

3. Keplersches Gesetz: $T^2 \sim a^3$ (T : Umlaufzeit, a : große Hauptachse)
Beweis Kap. 1.7 (Zusammenhang mit Flächensatz)

$$\bar{r} = \pi a b = \int_0^T \frac{dF}{dt} dt = \frac{L}{2\pi} T \dots$$

4. Der Hamiltonsche kanonische Formalismus

Motivation: Die Lagrange-Theorie benutzt als dynamische Variablen

die verallgemeinerten Koordinaten q_k und deren Geschwindigkeiten \dot{q}_k :

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k=1, \dots, f$$

f Dgln. 2. Ordnung für $q_k(t)$ im Lagrange-Formalismus

Für gewisse Problemstellungen (z.B. wenn es zyklische Variablen gibt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.}) \text{ und für bestimmte Erweiterungen der}$$

Theorie (\rightarrow Quantenmechanik, statistische Mechanik) ist es vorteilhaft,

statt q_k, \dot{q}_k die Variablen q_k und die zu q_k konjugierten verallgemeinerten

Impulse $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ zu benutzen.

Diese Variablentransformation $(q_k, \dot{q}_k, t) \rightarrow (q_k, p_k, t)$

leistet die Legendre-Transformation.

Es ergeben sich 2f Dgln. 1. Ordnung für $q_k, p_k(t)$ im

Hamilton-Formalismus.