English summary:

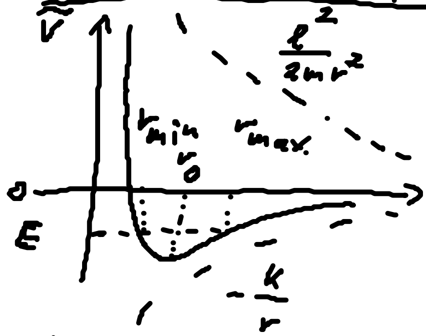
3.5.2 Conservation of energy and equations of motion

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \underset{V=V(r)}{\Longrightarrow} m\ddot r - \frac{\ell^2}{m r^3} + V'(r) = 0$$

$$\overset{\uparrow}{\Longrightarrow} \underbrace{\frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{\ell^2}{2 m r^2} + V(r)}_{= T + V = 2T - L} = E = \text{const.}$$

$\cdot \dot r$, integrate once

3.5.3 Planetary motion and Kepler's laws



open trajectories (hyperbola, parabola): $E \geq 0$

closed trajectories (ellipse): $-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$

4 Hamiltonian formalism

idea: canonical coordinates (q_k, p_k), generalized/conjugate momentum $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$

(remember: $L = L(q_1, \dots, q_f, \dot q_1, \dots, \dot q_f)$)

Hamilton function ("Hamiltonian") $\hat{=}$ Legendre transform of L

4.1 Legendre-Transformation und Hamilton-Funktion

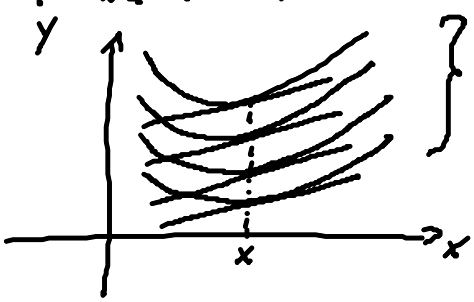
Mathematische Problemstellung: Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ (später $y \hat{=} L$, $x \hat{=} \dot q_k$). Es soll statt x die Variable $u = \frac{df}{dx}$ verwendet werden (Steigung von f im Punkt x).

Annahme: $\frac{df}{dx} = u$ lässt sich umkehren $\Longrightarrow x = \varphi(u)$

(Vorauss.: $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$, sonst $\frac{df}{dx} = u = \text{const.} \Rightarrow$ nicht umkehrbar)

Substitution in f: $y = f(x) = f(\varphi(u)) \equiv F(u)$

Bei dieser Transformation geht jedoch Information verloren, d.h. aus $y = F(u)$ ist $y = f(x)$ nicht mehr eindeutig rekonstruierbar, weil alle Funktion $y = f(x) + a$ zu demselben $F(u)$ führen.



$y = f(x) + a$

gleiche Steigung u bei x

$\Rightarrow y = F(u)$ nicht umkehrbar.

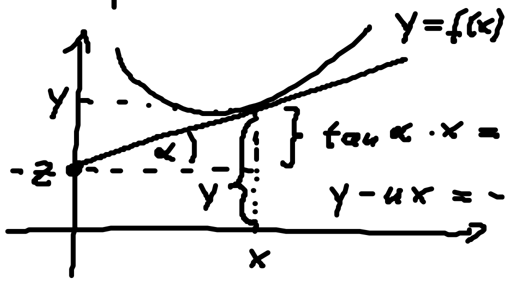
Deshalb wird eine andere umkehrbare Transformation eingeführt:

$$x \longrightarrow u$$

$$y \longrightarrow z = xu - f(x) = \varphi(u)u - f(\varphi(u)) \equiv g(u)$$

$y(x) \longrightarrow g(u)$: Legendre-Transformation

Graphische Veranschaulichung von $g(u) = x \frac{df}{dx} - f(x)$

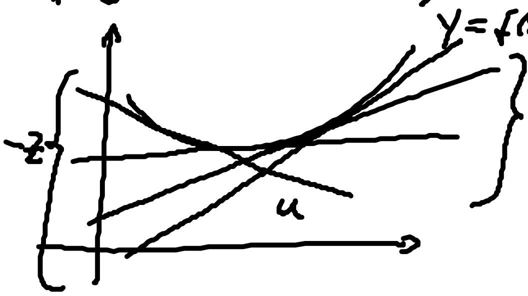


$\tan\alpha \cdot x = \frac{df}{dx} \cdot x = ux$

$y - ux = -z = -g$

die ursprüngliche Funktion $y = f(x)$ wird nach der Transformation $x \to u$ durch die Steigung u von $f(x)$ und den (negativen) Achsenabschnitt der Tangente $-z$ charakterisiert und damit eindeutig festgelegt.

Die Werte $(u, -z)$ bestimmen die Schar die Einhüllenden von $y = f(x)$:



Schar der Einhüllenden

Legendre- oder Berührungstransformation

Anwendung auf $L(q, \dot{q}, t)$:

$y \hat{=} L$, $x \hat{=} \dot{q}$

$u \hat{=} p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

q, t nicht geändert

$$z \hat{=} \underset{xu}{\dot{q}p} - \underset{f(x)}{L} =: H(q, p, t)$$

Hamilton-Funktion

Mehrere Variable: $L(q_1,\dots,q_f,\dot q_1,\dots,\dot q_f,t)$

$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$, $\boxed{H(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f,t) = \sum_{k=1}^{f} \dot q_k p_k - L}$

(Vor.: $L \in C^2$, $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_k \partial \dot q_l} \neq 0$, damit $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$ nach $\dot q_k$ auflösbar ist.)

4.2 Die Hamiltonsche Gleichungen

Ziel: Herleitung von Bewegungsgleichungen für q_k, p_k aus den Lagrange-Gleichungen 2. Art für q_k:

(a) 1 Variable ($f=1$):

Differenziale:

$$L = L(q,\dot q,t): \quad dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot q}d\dot q + \frac{\partial L}{\partial t}dt \qquad (1)$$

$$H = H(q,p,t): \quad dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt \qquad (2)$$

$$H = \dot q p - L \quad : dH = \dot q\, dp + p\, d\dot q - dL \qquad (3)$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3)

$$dH = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt}_{(2)} \overset{(3)}{=} \dot q\, dp + \cancel{p\, d\dot q} \overbrace{- \frac{\partial L}{\partial q}dq - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{p} d\dot q} - \frac{\partial L}{\partial t}dt}^{(1)}$$

Koeffizientenvergleich der Differenziale:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} , \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot q , \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Lagrange-Bewegungsgleichungen: $\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{\dot p} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}}_{-\frac{\partial H}{\partial q}}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot q &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}}$$

Hamiltonsche Gleichungen

(2 Dgln. 1. Ordnung für q, p statt
1 Dgl. 2. Ordnung für q)

(b) mehrere Variable:

$$H(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f,t) = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_1,\dots,q_f,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,t)$$

$$dH = \sum_k \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad \text{(linke Seite)}$$

$$= \sum_k \dot{q}_k dp_k + \underbrace{\sum_k p_k d\dot{q}_k - \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} d\dot{q}_k}_{=0} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \text{(rechte Seite)}$$

Erneuter Koeffizientenvergleich liefert:

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} \stackrel{!}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{d}{dt} p_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}}$$

<u>Hamiltonsche Gleichungen</u>

(kanonische Gleichungen)

$k = 1,\dots,f$

Der $2f$-dimensionale Raum $\Gamma := \{q_1,\dots,q_f, p_1,\dots,p_f\}$ heißt <u>Phasenraum</u>.

Anwendung: klassische statische Mechanik (Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Γ)

Physikalische Bedeutung der Hamilton-Funktion:

Für konservative Kräfte und holonome Zwangsbedingungen gilt: $L = T - V$.

Bei zeitlicher Translationsinvarianz (skleronome Zwangsbedingungen: $\frac{\partial}{\partial t} \underline{r}_i(q_1,\dots,q_f) = 0$ und $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) gilt: $\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T$ (Eulerscher Satz: T ist homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_k$)

$$\Rightarrow H = \sum_k \dot{q} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} - L = 2T - (T - V) = T + V$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\boxed{H = T + V}$$ Gesamtenergie (nur bei skleronomen Zwangsbedingungen und konservativen Kräften)

Nach Kapitel 3.4 folgt Energieerhaltung.

Nun auch im Hamilton-Formalismus:

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\sum_k \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_k} \underbrace{\dot{q}_k}_{= \frac{\partial H}{\partial p_k}} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \underbrace{\dot{p}_k}_{= -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \right\}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \overset{!}{=} 0} = 0$$

Bem: Für rheonome Zwangsbedingungen gilt im Allgemeinen $H \neq T + V$.