

English summary:

### 3.5.2 Conservation of energy and equations of motion

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \quad m \ddot{r} - \frac{\ell^2}{m r^3} + V'(r) = 0$$

$v = V(r)$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E = \text{const.}$$

$\uparrow$  integrate  
once

$$= T + V = 2T - L$$

### 3.5.3 Planetary motion and Kepler's laws



open trajectories (hyperbola, parabola):  $E \geq 0$   
closed trajectories (ellipse):  $-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$

## 4 Hamiltonian formalism

idea: canonical coordinates  $(q, p)$ , generalized/conjugate momenta  
(remember:  $L = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ )  
Hamilton function ("Hamiltonian")  $\hat{=} \text{Legendre transform of } L$   
 $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

### 4.1 Legendre-Transformation und Hamilton-Funktion

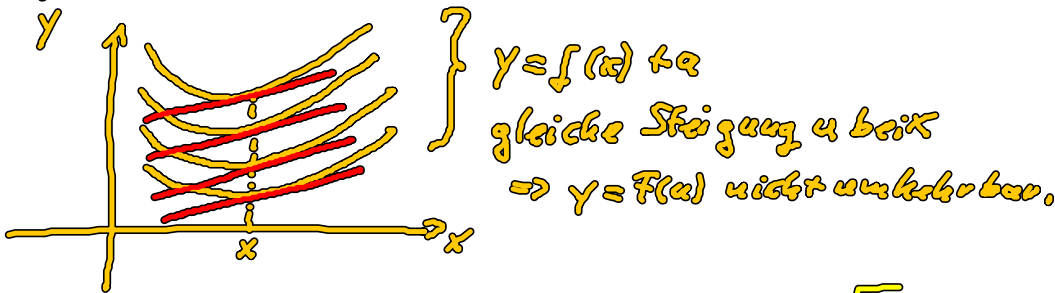
Mathematische Problemstellung: Gegeben sei eine Funktion  $y = f(x)$   
(später  $y \hat{=} L, x \hat{=} \dot{q}_k$ ). Es soll statt  $x$  die Variable  $u = \frac{df}{dx}$  verwendet  
werden (Steigung von  $f$  im Punkt  $x$ ).

Annahme:  $\frac{df}{dx} = u$  lässt sich umkehren  $\Rightarrow x = \varphi(u)$

(Voraus.:  $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$ , sonst  $\frac{df}{dx} = u = \text{const.} \Rightarrow$  nicht umkehrbar)

Substitution in  $f: y = f(x) = f(\varphi(u)) \equiv F(u)$

Bei dieser Transformation geht jedoch Information verloren, d.h. aus  $y = F(u)$  ist  $y = f(x)$  nicht mehr eindeutig rekonstruierbar, weil alle Funktionen  $y = f(x) + a$  zu demselben  $F(u)$  führen.



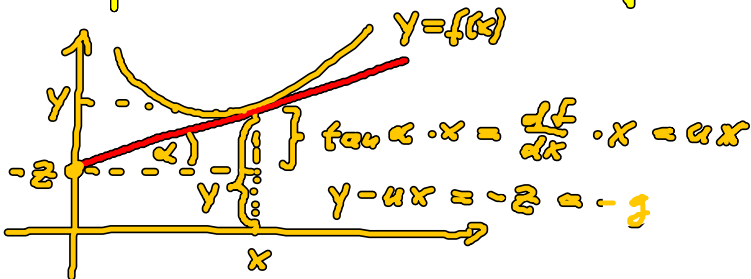
Deshalb wird eine andere umkehrbare Transformation eingeführt:

$$x \rightarrow u$$

$$y \rightarrow z = xu - f(x) = \varphi(u)u - f(\varphi(u)) \equiv g(u)$$

$y(x) \rightarrow g(u)$ : Legendre-Transformation

Graphische Veranschaulichung von  $g(u) = x \frac{df}{dx} - f(x)$



die ursprüngliche Funktion  $y = f(x)$  wird nach der Transformation  $x \rightarrow u$  durch die Steigung  $u$  von  $f(x)$  und den (negativen) Achsenabschnitt der Tangente  $-z$  charakterisiert und damit eindeutig festgelegt.

Die Werte  $(u, -z)$  bestimmen die Scher der Einhüllenden von  $y = f(x)$ :



Anwendung auf  $L(q, \dot{q}, t)$ :

$$y \hat{=} L, x \hat{=} \dot{q}$$

$$u \hat{=} p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$q, t$  nicht geändert

$$z \hat{=} \dot{q}p - L =: H(q, p, t)$$

$$xu - f(x)$$

Hamilton-Funktion

Mehrere Variable:  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$

$$P_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$H(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t) = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k P_k - L$$

(Vor:  $L \in C^2$ , det  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \neq 0$ , damit  $P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  nach  $\dot{q}_k$  auflösbar ist.)

## 4.2 Die Hamiltonsche Gleichungen

Ziel: Herleitung von Bewegungsgleichungen für  $q_k, P_k$  aus den Lagrange-Gleichungen 2. Art für  $q_k$ :

(a) 1 Variable ( $f=1$ ):

Differenziale:

$$L = L(q, \dot{q}, t) : dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1)$$

$$H = H(q, P, t) : dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial P} dP + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (2)$$

$$H = \dot{q}P - L : dH = \dot{q}dP + Pd\dot{q} - dL \quad (3)$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3)

$$dH = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial P} dP + \frac{\partial H}{\partial t} dt}_{(2)} = \dot{q}dP + P d\dot{q} - \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right)}_{(1)}$$

Koeffizientenvergleich der Differenziale:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = - \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial P} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Lagrange-Bewegungsgleichungen:  $\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{\dot{p}} = \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial H}{\partial q}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} = - \frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

## Hamiltonsche Gleichungen

(2 Dgl. 1. Ordnung für  $q, P$  statt  
1 Dgl. 2. Ordnung für  $q$ )

(b) mehrere Variable:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

$$dH = \sum_k \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (\text{linke Seite})$$

$$= \sum_k \dot{q}_k dp_k + \sum_k p_k dq_k - \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (\text{rechte Seite})$$

= 0

Erneuter Klammer-Identitätenvergleich liefert:

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k} \stackrel{!}{=} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{d}{dt} p_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= - \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}}$$

Hamiltonsche Gleichungen

(kanonische Gleichungen)

$k=1, \dots, f$

Der  $2f$ -dimensionale Raum  $\Gamma := \{q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f\}$  heißt

Phasenraum.

Anwendung: klassische statistische Mechanik (Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf  $\Gamma$ )

Physikalische Bedeutung der Hamilton-Funktion:

Für konservative Kräfte und holonome Zwangsbedingungen gilt:  $L = T - V$ .

Bei zeitlicher Translation  $t \rightarrow t + \tau$  (skleronome Zwangsbedingungen:

$\frac{\partial}{\partial t} r_i(q_1, \dots, q_f) = 0$  und  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ) gilt:  $\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T$  (Euler'scher Satz:  $T$  ist homogene quadratische Funktion der  $\dot{q}_k$ )

$$\Rightarrow H = \sum_k \dot{q}_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} - L = 2T - (T - V) = T + V$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

$$H = T + V$$

Gesamtenergie

(nur bei skleronomen Zwangsbedingungen und konservativen Kräften)

Nach Kapitel 3.4 folgt Energieerhaltung.

Nur auch im Hamilton-Formalismus:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0} \qquad\qquad\qquad = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Bem: Für rheonomen Zwangsbedingungen gilt im Allgemeinen  $H \neq T + V$ .