English summary: 4.2 Canonical equations of Hamilton (continued)

Recipe: (i) Choose generalized coordinates $f = (q_1, \dots, q_f)$

(ii) transformation $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$, $\dot{\underline{r}}_i = \dot{\underline{r}}_i(q_1, \dots, q_f, t)$

(iii) Get Lagrangian $L(q, \dot{q}, t) = T - V$ (conservative forces)

(iv) Calculate generalized momenta $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow p_k = p_k(q, \dot{q}, t)$

$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t)$

(v) Calculate Hamiltonian via Legendre transform of L

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}, t)$$

(vi) Calculate canonical equations $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

3. Beispiel: Geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld

Wiederholung von 2.2.3: $L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + e\left(\dot{\underline{q}} \cdot \underline{A}(q, t) - \phi(q, t)\right)$

(iv) kanonisch konjugierte Impulse: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k + e A_k(q, t)$

$\Rightarrow \dot{q}_k = \frac{1}{m}(p_k - e A_k)$

(v) $$H = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\frac{1}{m}(p_k - e A_k)}_{= \dot{q}_k} p_k \underbrace{- \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{3} (p_k - e A_k)^2}_{= T} \underbrace{- \frac{e}{m} \sum_{k=1}^{3} (p_k - e A_k) A_k + e\phi}_{= V}$$

(Einschub: elektrisches Feld: $\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$
vgl. 2.2.3
magnetische Induktion: $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$)

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2m} (\underline{p} - e \underline{A}(q, t))^2 + e \phi(q, t)$$

Beachte: $m\dot{\underline{q}} = \underline{p} - e\underline{A}$ ist der kinetische Impuls (nur mit Geschwindigkeit verknüpft)

$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist der kanonische Impuls.

(vi) $$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{m}(p_k - eA_k) \quad (*)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{3}(p_\ell - eA_\ell)\left(-e\frac{\partial A_\ell}{\partial q_k}\right) - e\frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} \dot{q}_\ell \, e\frac{\partial A_\ell}{\partial q_k} - e\frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

Test durch Kontrolle der bekannten Bewegungsgleichung $m\ddot{q}_k = \ldots$

$$m\ddot{q}_k \overset{(*)}{=} \dot{p}_k - e\frac{dA_k}{dt}$$

$$= \underbrace{e\sum_{\ell=1}^{3}\left(\dot{q}_\ell \frac{\partial A_\ell}{\partial q_k}\right) - e\frac{\partial \phi}{\partial q_k}}_{=\dot{p}_k} - e\underbrace{\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{3}\frac{\partial A_k}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell\right)}_{=\frac{d}{dt}A_k}$$

$$= \underbrace{-e\frac{\partial \phi}{\partial q_k} - e\frac{\partial A_k}{\partial t}}_{eE_k} - e\Bigg[\underbrace{\sum_\ell \frac{\partial A_k}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell}_{=(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{\nabla})A_k} - \underbrace{\sum_\ell \dot{q}_\ell \frac{\partial A_\ell}{\partial q_k}}_{=\frac{\partial}{\partial q_k}(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A})}\Bigg]$$

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

$$\dot{\underline{q}}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}) - \underline{A}(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{\nabla})$$

$$= eE_k - e(\dot{\underline{q}}\times\underline{B})_k, \quad \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$$

$\Rightarrow$ identisch zur Bewegungsgleichung aus 2.2.3 (Lagrange II)

4.3 Kanonische Transformationen

Wahl der verallgemeinerten Koordinaten ist nicht eindeutig!

(Vgl. 2.2.4: Lagrange-Gleichungen 2. Art sind forminvariant unter beliebigen diffeomorphen Transformationen der Koordinaten

$$(q_1, \dots, q_f) \longrightarrow (Q_1, \dots, Q_f)$$

$$\Rightarrow \tilde{L}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) = L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \underline{\dot{q}}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t), t).$$

Frage: Unter welchen Transformationen $(\underline{q}, \underline{p}) \longrightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$ sind die Hamilton-Gleichungen forminvariant?

D.h. mit $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ soll auch $\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}$, $\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k}$ gelten.

NB: (i) Die Klasse der erlaubten Transformation ist größer als beim Lagrange-Formalismus, da nun die p_k neben den q_k als unabhängige Variable betrachtet werden, die ebenfalls transformiert werden können.

(ii) Die neuen Q_k, P_k haben nicht notwendig mehr den Charakter von Orts- bzw. Impulsvariablen.

Motivation: In den Lagrange-Gleichungen 2. Art heißt q_j zyklisch, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \underset{\text{Euler-Lagrange-Gl.}}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j = \text{const.}$$

keine Aussage über $\dot{q}_j$! $\dot{q}_j$ muss weiterhin als Variable behalten werden.

Hamilton-Formalismus: In $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$ heißt q_j zyklisch, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \xRightarrow{\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}} \dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j =: \alpha_j = \text{const.}$$

d.h. q_j tritt in H nicht auf und p_j kann durch die Bewegungskonstante α_j ersetzt werden: $H(q_1,\dots,q_{j-1},q_{j+1},\dots,q_f,p_1,\dots,p_{j-1},\alpha_j,p_{j+1},\dots,p_f,t)$.
ohne q_j!

Das kanonische System hat also nur noch $f-1$ Freiheitsgrade!

Idee: Lösung der Hamilton-Gleichungen, indem man Schritt für Schritt zyklische Variable durch geeignete Transformationen der (q,p) einführt, bis alle Q zyklisch sind: $H(P_1,\dots,P_f,t)$ mit $P_k=\alpha_k=\text{const.}$

$$\dot{Q}_k=\frac{\partial H}{\partial P_k}=:v_k(t) \Rightarrow Q_k=\int_{t_0}^{t} v_k(t')\,dt'+\beta_k$$

$\Rightarrow 2f$ Konstanten der Bewegung α_k, β_k $(k=1,\dots,f)$

Beispiel: reduziertes 2-Körper-Problem in der Ebene $\perp$ Drehimpuls ℓ

$$L(r,\dot{r},\varphi,\dot{\varphi})=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r)$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ zyklisch}: \frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=\ell=\text{const.}$$

Hamilton-Gleichungen: $p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \Rightarrow \dot{r}=\frac{p_r}{m}$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$\Rightarrow H=p_r\dot{r}+p_\varphi\dot{\varphi}-L=m\dot{r}^2+mr^2\dot{\varphi}^2-L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r)$$

$$=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}+V(r)$$

mit $\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0$, d.h. φ zyklisch, folgt $p_\varphi=\alpha_\varphi=\ell=\text{const.}$

$$\Rightarrow H(r,p_r)=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{\ell^2}{2mr^2}+V(r)$$

Reduktion von $f=2$ (r,φ) auf $f=1$ (r) Freiheitsgrad!

Bedingung für eine kanonische Transformation:

Die Hamiltonschen Gleichungen folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \underset{\text{Legendre-Trafo}}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q},\underline{p},t) \right\} = 0 \qquad (1)$$

Entsprechend muss für das System $\{\underline{Q}, \underline{P}, \overline{H}\}$ gelten:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(\underline{Q},\underline{P},t) \right\} = 0 \qquad (2)$$

(1) und (2) sind äquivalent, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q},\underline{p},t) = \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(\underline{Q},\underline{P},t) + \frac{d}{dt} M_1 \qquad (3)$$

mit beliebiger Funktion $M_1(\underline{q},\underline{Q},t)$ (Erzeugende der kanonischen Transformation)

(Verallgemeinerung der Eichfunktion: $M(\underline{q},t)$ aus Kap. 2.2.3)