English summary: **4.3 Canonical transformation**

idea: change of coordinates $(\underline{q},\underline{p},t) \longrightarrow (\underline{Q},\underline{P},t)$ such that the Hamiltonian remains form invariant, i.e., the action integral over the Lagrangian must be stationary:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q},\underline{p},t) \right\} = 0 \qquad (1)$$

and

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(\underline{Q},\underline{P},t) \right\} = 0 \qquad (2)$$

Claim: (1) and (2) are equivalent if:

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q},\underline{p},t) = \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(\underline{Q},\underline{P},t) + \frac{d}{dt} M_1(\underline{q},\underline{Q},t) \qquad (3)$$

$M_1(\underline{q},\underline{Q},t)$: generating function of the canonical transformation

Fortsetzung von Kapitel 4.3

Beweis, dass (1) und (2) äquivalent sind:

a) $$\frac{d}{dt} M_1(\underline{q},\underline{Q},t) = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial M_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{f} \left(p_i - \frac{\partial M_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{f} \left(P_i + \frac{\partial M_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i + H - \overline{H} + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Da $\underline{q}$ und $\underline{Q}$ unabhängige Variablen sind, folgt somit aus (3):

$$\boxed{p_i = \frac{\partial M_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_i}, \quad \overline{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}}$$

Damit ist die kanonische Transformation durch $M_1(\underline{q},\underline{Q},t)$ eindeutig bestimmt: $p_i = \frac{\partial M_1}{\partial q_i} \overset{\text{Umkehrung}}{\Longrightarrow} Q_i(\underline{q},\underline{p},t)$ falls $\det\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial q_i \partial Q_i}\right) \neq 0$

$$P_i = -\frac{\partial M_1(\underline{q},\underline{Q},t)}{\partial Q_i} = -\frac{\partial M_1(\underline{q},\underline{Q}(\underline{q},\underline{p},t),t)}{\partial Q_i} = P_i(\underline{q},\underline{p},t)$$

Umkehrtransformation : $q_i = q_i(\underline{Q}, \underline{p}, t)$

eingesetzt in $p_i = \frac{\partial M_1}{\partial q_i} \implies P_i = P_i(\underline{Q}, \underline{P}, t)$

b) Wir zeigen nun, dass (1) und (2) äquivalent sind:

$$(1) \Leftrightarrow 0 \overset{!}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right\} \underset{(3)}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - \bar{H} + \frac{d}{dt} M_1 \right\}$$

$$= \underbrace{\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - \bar{H} \right\}}_{= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\delta P_i \dot{Q}_i + P_i \delta \dot{Q}_i - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \delta Q_i - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} \delta P_i \right)} + \underbrace{\delta \left\{ M_1(q(t_2), \underline{Q}(t_2), t_2) - M_1(q(t_1), \underline{Q}(t_1), t_1) \right\}}_{= \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0,\ \text{da}\ \delta q(t_1)=0,\ \delta q(t_2)=0} + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_i} \delta Q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\text{i.a.} \neq 0} \right)}$$

Mit $\int_{t_1}^{t_2} dt\, P_i \delta \dot{Q}_i = P_i \delta Q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{P}_i \delta Q_i$ folgt:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \sum_i \underbrace{\left(P_i + \frac{\partial M_1}{\partial Q_i} \right)}_{=0\ \text{Konstruktion von}\ M_1} \delta Q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ \underbrace{\left(\dot{Q}_i - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} \right)}_{\overset{!}{=} 0} \delta P_i - \underbrace{\left(\dot{P}_i + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \right)}_{\overset{!}{=} 0} \delta Q_i \right\}$$

$\delta P_i, \delta Q_i$ unabhängig :

gilt für: $\dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}$ und $\dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i}$

Hamilton-Gleichungen für $\bar{H}(\underline{Q}, \underline{P}, t)$

Beispiele für $M_1(q, \underline{Q})$ siehe ÜB 11 Aufgaben 26 + 27 □

$A26: M_1(q, Q) = k \frac{q^2}{2 \tan Q}$ $\qquad A27: M_1(q, \underline{Q}) = \sum_{i=1}^{f} q_i Q_i$

Äquivalente Formulierung der erzeugenden Funktion:

Legendre-Transformation von $M_1(q, \underline{Q}, t)$: (für $\underline{Q}$)

$$M_2(q, \underline{P}, t) = M_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial Q_i} Q_i$$

Aus (3) folgt $\left(\sum_i (\underline{p_i \dot{q}_i} - \underline{P_i \dot{Q}_i}) - (H - \bar{H}) = \frac{d}{dt} M_1 \right)$ mit

$$\frac{d}{dt} M_1 = \frac{d}{dt}\Big(M_2(q,P,t) - \sum_i \underset{\substack{\uparrow \\ = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_i}}}{P_i} Q_i\Big) = \sum_i \Big(\frac{\partial M_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial M_2}{\partial P_i}\dot{P}_i - Q_i\dot{P}_i - P_i\dot{Q}_i\Big) + \frac{\partial M_2}{\partial t}$$

$$\sum_i \Big\{\Big(p_i - \frac{\partial M_2}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_i + \Big(Q_i - \frac{\partial M_2}{\partial P_i}\Big)\dot{P}_i + \cancel{(P_i - P_i)}\,\dot{Q}_i\Big\} = \Big(H - \bar{H} + \frac{\partial M_2}{\partial t}\Big)$$

also (q, P unabhängig):

$$\boxed{p_i = \frac{\partial M_2}{\partial q_i}\ ,\quad Q_i = \frac{\partial M_2}{\partial P_i}\ ,\quad \bar{H} = H + \frac{\partial M_2}{\partial t}}$$

Beispiel: $M_2(q,P,t) = \sum_{i=1}^{f} q_i P_i$

$$\Rightarrow p_i = P_i = \frac{\partial M_2}{\partial q_i},\quad Q_i = \frac{\partial M_2}{\partial P_i} = q_i \qquad \text{(identische Transformation)}$$

(in komplizierteren Fällen $q_i = q_i(Q,p,t)$, $P_i = P_i(Q,p,t)$)

Analog: $M_3(p,Q,t) = M_1(q,Q,t) - \sum_i \frac{\partial M_1}{\partial q_i} q_i$

$$\Rightarrow q_i = -\frac{\partial M_3}{\partial p_i}\ ,\quad P_i = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_i}$$

$$M_4(p,P,t) = M_1(q,Q,t) - \sum_i \Big(\frac{\partial M_1}{\partial q_i} q_i + \frac{\partial M_1}{\partial Q_i} Q_i\Big)$$

$$\Rightarrow q_i = -\frac{\partial M_4}{\partial p_i}\ ,\quad Q_i = \frac{\partial M_4}{\partial P_i}$$

4.4 Symplektische Struktur des Phasenraums

Da die kanonischen Transformationen generalisierte Koordinaten und Impulse ineinander transformieren können, sollten q und p nicht voneinander ausgezeichnet sein. Um diese Symmetrie des kanonischen Formalismus sichtbar zu machen, führen wir in diesem Abschnitt eine neue Notation ein.

Zunächst $f=1$: $\underline{x} := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ Vektor im Phasenraum

$$\underline{H}_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \quad \text{Ableitungsvektor}$$

$$\underline{\underline{J}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ Metrik im Phasenraum (metrischer Tensor)

"schiefsymmetrische Matrix": $\underline{\underline{J}}^T = -\underline{\underline{J}}$

kanonische Gleichungen: $\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\,\underline{H}_x} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\underline{\underline{J}}\,\dot{\underline{x}} = \underline{H}_x}$$

Es gilt: $\underline{\underline{J}}^2 = -\underline{\underline{1}}$, $\underline{\underline{J}}^{-1} = \underline{\underline{J}}^T = -\underline{\underline{J}}$

Beliebige Anzahl von Freiheitgraden:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}, \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_f} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{J}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}f \\ \}f \end{array}$$

mit $\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $f \times f$ Matrix

kanonischen Gleichungen: $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\,\underline{H}_x \Leftrightarrow -\underline{\underline{J}}\,\dot{\underline{x}} = \underline{H}_x$ $\quad \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$