English summary:

4.4 Symplectic structure of the phase space (continued)

The set of (symplectic) matrices $\underline{\underline{M}}$ with $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$ forms the real symplectic group S over $\mathbb{R}^{2f}$.

4.5 Liouville's theorem

The phase-space volume occupied by a collection of systems evolving according to the canonical equations (Hamiltonian systems) is preserved
flow in phase space: $\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0) = \phi_{t,t_0}(\underline{x}_0)$, $\phi_{t,t_0} : \Gamma \to \Gamma$

$\underline{x}_0(t_0) \mapsto \underline{x}(t)$

Beweis des Liouvilleschen Satzes: (integrale Form)

Gegeben sei eine Mengen von Anfangskonfigurationen bei t_0, die das Phasenraumgebiet U_{t_0} mit Volumen V_{t_0} ausfüllen: $V_{t_0} = \int_{U_{t_0}} dx_0^{2f}$

Bei t: $V_t = \int_{U_t} d^{2f}x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substi-} \\ \text{tution}}}{=} \int_{U_{t_0}} dx_0^{2f} \det\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)$

$$= \int_{U_{t_0}} dx_0^{2f} \det\left(D\phi_{t,t_0}(\underline{x}_0)\right)$$

mit der Jacobi-Matrix: $\left(D\phi_{t,t_0}(\underline{x}_0)\right) := \frac{\partial \phi^i_{t,t_0}(\underline{x}_0)}{\partial x_0^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}$

Entwicklung für $t \approx t_0$:

$$\phi_{t,t_0}(\underline{x}_0) = \underline{x}_0 + \underbrace{\underline{F}(\underline{x}_0, t)}_{\dot{\phi}|_t = \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}} (t - t_0) + O\left((t-t_0)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi^i_{t,t_0}(\underline{x}_0)}{\partial x_0^k} = \delta_{ik} + \frac{\partial F^i}{\partial x_0^k} (t - t_0) + O\left((t-t_0)^2\right)$$

$$\Rightarrow \det\left(D\phi_{t,t_0}\right) \underset{\uparrow}{=} 1 + (t - t_0) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F^i}{\partial x_0^i} + O\left((t-t_0)^2\right)$$

$$\det(\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{B}}\,\epsilon)\approx 1+\epsilon\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{B}}+O(\epsilon^2)$$

Mit $\sum_{i=1}^{2f}\frac{\partial F^i}{\partial x_0^i}=\mathrm{div}\,\underline{F}=\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\equiv 0$ divergenzfreier Fluss im Phasenraum

folgt: $V_t=\int_{U_{t_0}} dx_0^{2f}\det\left(D\phi_{t,t_0}(\underline{x}_0)\right)=\int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0\left[1+O((t-t_0)^2)\right]\approx V_{t_0}$ $\square$

NB: Der Liouvillesche Satz kann auch in der lokale Form formuliert werden: Für den Fluss ϕ zu $\underline{\dot{x}}=\underline{\underline{I}}\,\underline{H}_x$ ist $D\phi$ eine symplektische Matrix, d.h. $\det(D\phi)=1$.

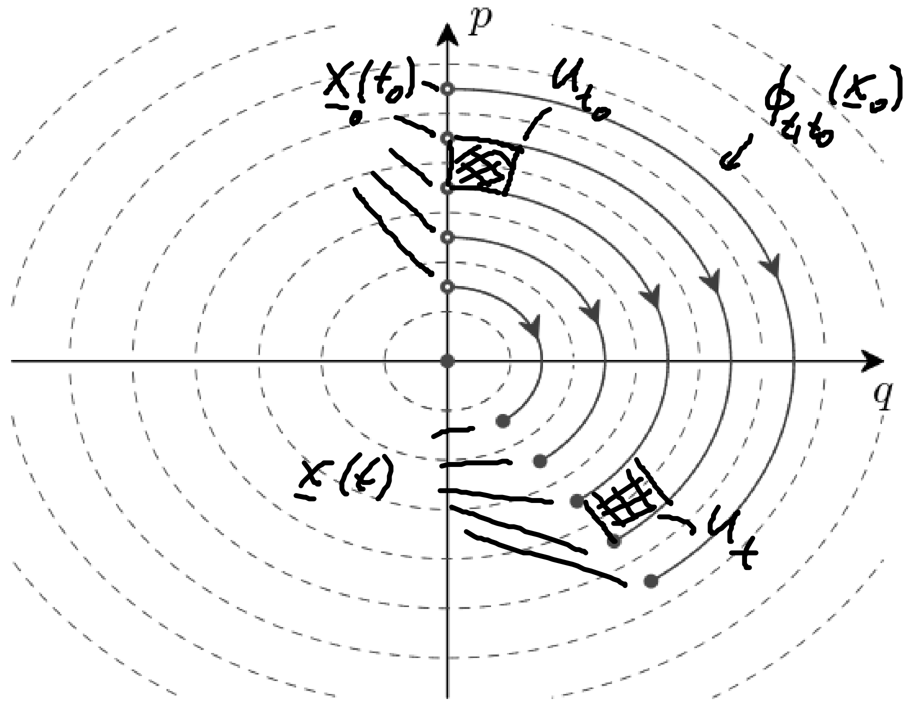
$\Rightarrow$ Das Volumenelement $dx^1\ldots dx^{2f}$ im Phasenraum ist unter dem Fluss invariant: $dx^1\ldots dx^{2f}=\underbrace{\det(D\phi)}_{=1}\,dx_0^1\ldots dx_0^{2f}$

Beispiel: 1-dimensionaler harmonischer Oszillator:

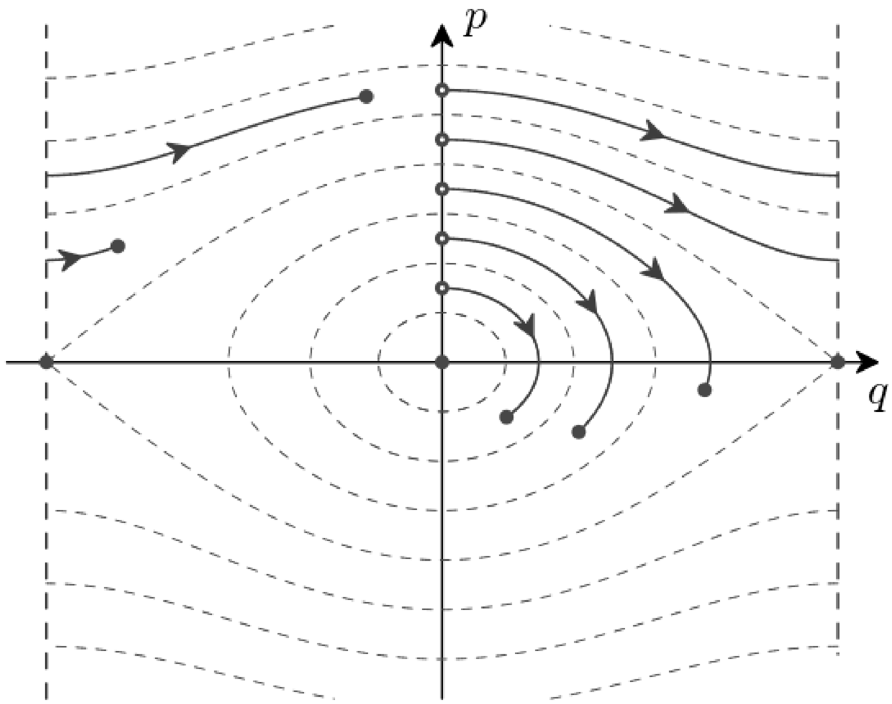
$$x^i(t)=\sum_{k=1}^{2}C_{ik}\,x_0^k \text{ mit } \underline{\underline{C}}=\begin{pmatrix}\cos\omega_0(t-t_0) & \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0(t-t_0)\\ -\omega_0\sin\omega_0(t-t_0) & \cos\omega_0(t-t_0)\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det\underline{\underline{C}}=\cos^2\omega_0(t-t_0)+\sin^2\omega_0(t-t_0)=1$

$\Rightarrow dx^1dx^2=(\det\underline{\underline{C}})\,dx_0^1dx_0^2=dx_0^1dx_0^2$



Pendel (lineare Rückstellkraft):



4.6 Poisson-Klammern

Jede Observable (physikalische Größen, z.B. Energie, Gesamtimpuls, Drehimpuls etc.) lässt sich in der klassischen Mechanik als Funktion von q, p, t darstellen:

$g(q, p, t)$

zeitliche Änderung längs der Bahn $q(t), p(t)$ im Phasenraum Γ:

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$=: \{ g, H \} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Def.: Für zwei beliebige Observable $f(q,p,t)$ und $g(q,p,t)$ heißt

$$\{ f, g \} := \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$ <u>Poisson-Klammer</u>.

Eigenschaften:

(i) Die Poisson-Klammer ist eine schiefsymmetrische, nichtentartete

Bilinearform, d.h. sie definiert ein symplektisches Skalarprodukt im Phasenraum (vgl. 4.4/4.5)

$$\{f,g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x) = \underline{f}_x^T \underline{\underline{J}}\, \underline{g}_x = \sum_{i,k=1}^{f} \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

(vgl. ÜB 12)

(ii) Die Poisson-Klammer ist invariant unter kanonischen Transformation.
(vgl. ÜB 12 A 30)

(iii) Für nicht explizit zeitabhängige Observable $g(q,p)$ gilt:

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}$$

d.h.: g ist eine Bewegungskonstante $\Leftrightarrow \{g,H\} = 0$

(iv) Spezialfall $g = q_k$ oder $g = p_k$:

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\} \qquad \text{Hamiltonsche Gleichungen}$$
$$\dot{p}_k = \{p_k, H\}$$

(v) Fundamentale Poisson-Klammern:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad , \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Satz: Die Transformation $(q,p) \to (\underline{Q}, \underline{P})$ ist genau dann kanonisch, wenn $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$, $\{Q_i, Q_j\} = 0$, $\{P_i, P_j\} = 0$

Beweis: Betrachte nicht explizit zeitabhängige Transformation $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$
$\Leftrightarrow \bar{H} = H$

Bewegungsgleichungen: $\dot{y}_k = \{y_k, H\} = \sum_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}$

$$= \sum_{ijl} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$

$$= \sum_l \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \underbrace{\sum_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}}_{\{y_k, y_l\}}$$

Also: $\dot{y}_k = \sum_l J_{kl} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \iff \{y_k, y_l\} = J_{kl}$

$(\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{\bar{H}}_y)$ Hamiltonsche Bewegungsgl. in neuen Koordinaten

fundamentalen Poisson-Klammern in den neuen Koordinaten

d.h. Transformation ist kanonisch $\square$

Damit ergibt sich ein einfach nachprüfbares Kriterium für kanonische Transformationen!

Folgendes ist äquivalent:

Die Transformation $\underline{x} = \binom{q}{p} \longmapsto \underline{y} = \binom{Q}{P}$ ist kanonisch.

$\iff$ (a) die kanonischen Gleichungen $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$ sind invariant.

$\iff$ (b) Poisson-Klammern $\{f, g\}$ sind invariant $\forall f, g$.

$\iff$ (c) die fundamentalen Poisson-Klammern $\{x_i, x_j\} = J_{ij}$ sind invariant.

$\iff$ (d) die Jacobi-Matrix $M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$ ist symplektisch, d.h. $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$

$\iff$ (e) es existiert eine Erzeugende.

Bezug zur Quantenmechanik (TP II):

Übergang zur Quantenmechanik ist möglich:

klass. Observable $g(q, p, t) \longrightarrow$ quantenmechanischer Operator $g: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$: Hilbert-Raum)

Poisson-Klammer $\{f, g\} \longrightarrow$ Kommutator $\frac{1}{i\hbar}[f, g] := \frac{1}{i\hbar}(fg - gf)$

Fundamentale Poisson-Klammern $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ $\longrightarrow$ $[q_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$ kanonische Vertauschsrelationen

$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$ $\qquad$ $[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j]$

Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ $\longrightarrow$ Hamilton-Operator H

Bewegungsgleichungen: $\longrightarrow$ Heisenbergschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} g = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} \qquad \frac{d}{dt} g = \frac{1}{i\hbar}[g, H] + \frac{\partial g}{\partial t}$$