English summary:

4.6 Poisson brackets

Consider an observable $g = g(q, p, t)$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{= \dot q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial g}{\partial t} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$= \dot p_i$$

Definition of Poisson brackets: $\{f, g\} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

e.g.: canonical equations:

$$\dot q_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\dot p_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad \{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$$

equivalent statements: Transformation $\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \underline{y} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ is canonical

$\Leftrightarrow$ (a) canonical equation $\dot{\underline{x}} = \underline{J}\, \underline{H}_x$ are invariant

$\Leftrightarrow$ (b) Poisson brackets $\{f, g\}$ " "

$\Leftrightarrow$ (c) fundamental Poisson brackets " "

$\Leftrightarrow$ (d) Jacobian matrix $M_{kp} = \frac{\partial x_k}{\partial y_p}$ is symplectic $(\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}})$

$\Leftrightarrow$ (e) Existence of generating function

4.7 Die Hamilton-Jacobi-Theorie

Strategie: Suche eine kanonische Transformation, die alle Koordinaten zyklisch macht.

$\Rightarrow$ Transformierte Hamilton-Funktion: $\tilde H \equiv 0$

Wähle speziell als Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$M_2(q, \underline{P}, t) =: S$$

Dann ist folgende kanonische Transformation gesucht:

$$(q,p) \longrightarrow (Q,P), \quad H(q,p,t) \longrightarrow \bar{H}(Q,P,t) = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\text{mit } p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$$

so dass gilt:

$$\boxed{\bar{H} = H\Big(q_1,\dots,q_f,\underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_1}}_{p_1},\dots,\underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_f}}_{p_f},t\Big) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Hamilton-Jacobi-Dgl.

(nichtlineare partielle Dgl. 1. Ordnung für $S(q,\alpha,t)$, $\alpha_k = P_k = \text{const}$, also nur $f+1$ Variable q,t)

kanonischen Gleichungen:

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \equiv 0 \Rightarrow P_k = \alpha_k = \text{const}$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \equiv 0 \Rightarrow Q_k = \beta_k = \text{const}$$

Lösungsschema für die Hamilton-Jacobi-Dgl.:

(i) $H(q,p,t)$, $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \Rightarrow H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

(ii) Löse Hamilton-Jacobi-Dgl. $\Rightarrow S(q,\alpha,t)$ mit $\alpha = P$

(iii) Aus der Erzeugenden $S(q,\alpha,t)$ folgt:

$$Q_k = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_k} = \beta_k \quad \overset{\text{umkehrung}}{\Longrightarrow}\ \ \det\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial q_l} \neq 0 \qquad q_j = q_j(\alpha,\beta,t)$$

(iv) $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j(q,\alpha,t) = p_j(q(\alpha,\beta,t),\alpha,t)$

(v) Bestimmung von α,β aus den Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(iii)}{\Longrightarrow}\ q_j(0) = q_j(\alpha,\beta,0) \\ &\overset{(iv)}{\Longrightarrow}\ p_j(0) = p_j(\alpha,\beta,0) \end{aligned}\right\} \text{ umstellen nach } \begin{aligned} &\alpha\,(q(0),p(0)) \\ &\beta\,(q(0),p(0)) \end{aligned}$$

physikalische Bedeutung von S:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_k}}_{p_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\tilde{H}-H=-H} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = L$$

Lagrange-Funktion

Also $S = \int L\,dt$: Wirkungsfunktion

Bsp: 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

(i) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$, $S(q,P,t)$ mit $p = \frac{\partial S}{\partial q}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

(ii) Lösungsansatz: $S(q,P,t) = W(q;P) + V(t;P)$ Separationsansatz nach q und t

Parameter

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2}_{\text{unabhängig von } t} = \underbrace{-\frac{dV}{dt}}_{\text{unabhängig von } q} \overset{!}{=} \alpha = \text{const}$$

identifizieren mit Parameter P

$$\Rightarrow V(t) = -\alpha t + V_0$$

$$\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 = m^2\omega^2\left(\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2\right) \Rightarrow W = m\omega\int dq\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}$$

$$\text{Also: } S(q,\alpha,t) = m\omega\int dq\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} - \alpha t + \underbrace{V_0}_{=0\ (\text{o.B.d.A.})}$$

$$= -\alpha t + \left[\frac{q}{2}\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} + \frac{\alpha}{m\omega^2}\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2|\alpha|}}\right)\right]$$

(iii) $$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{1}{\omega}\arcsin\left(q\omega\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right) \overset{!}{=} \beta$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\sin\left(\omega(t+\beta)\right) = q(\alpha,\beta,t)$$

(iv) $$p = \frac{\partial S}{\partial q} = m\omega\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}$$

$$= \sqrt{2\alpha m}\cos\left(\omega(t+\beta)\right) = p(\alpha,\beta,t)$$

(v) Anfangsbedingungen: $p(0)=0$, $q(0)=q_0\neq 0$ (maximal ausgelenkt), $t=0$

$\Rightarrow q_0=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin(\omega\beta)$

$0=p_0=\sqrt{2\alpha m}\cos(\omega\beta) \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2\omega}$

$\Rightarrow q_0=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}$

also: $\alpha=\frac{m}{2}\omega^2 q_0^2=E$: Gesamtenergie

Somit: $P=\alpha=E$ (Energie)

$Q=t_0$ (Zeit)

Spezialfall: nicht explizit zeitabhängiges $H=H(q,p)$

$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \Leftrightarrow H$ ist Integral der Bewegung $\left(\frac{d}{dt}H=\{H,H\}=0\right)$

Hamilton-Jacobi-Dgl: $H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_f}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$ $\quad \frac{\partial H}{\partial t}=0$

Lösungsansatz: $S(q,P,t)=W(q;P)-Et$

$\Rightarrow H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial W}{\partial q_f}\right)=E$ (Energie bei skleronomen Zwangsbedingungen)

$W(q,P)$ heißt <u>verkürzte Wirkungsfunktion</u>.

Einschub: Zusammenfassung der Kapitel 1 bis 4

1. Arbeit im Gravitationsfeld
2. Schwere und träge Masse
3. Mathematisches Pendel als dynamisches System
4. Erzwungene Schwingung und Green'sche Funktion
5. Zentralkraft und Drehimpulserhaltung
6. Periheldrehung

} Newtonsche Mechanik (Kap. 1)

7. Freier Fall auf der rotierenden Erde
8. Foucault'sches Pendel

beschleunigte/rotierende Bezugssysteme (1.8/1.9)

$\underline{r}'=\underline{r}_0+\underline{v}_0 t+\underline{\underline{R}}\,\underline{r}$, $\dot{\underline{r}}=\dot{\underline{r}}_0+\dot{\underline{r}}'+\underline{\omega}\times\underline{r}'$

9. Fliehkraftpendel mit Lagrange I
10. Rollendes Rad auf rauer Unterfläche

Lagrange Gl. 1. Art: $m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu = 0$

D'Alembertsches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{X}_i) \cdot \delta \underline{r}_i$
(2.1.3)

Zwangskräfte: $m_i \ddot{x}_i = \underline{X}_i + \underline{Z}_i \;,\; \sum_{j=1}^{3N} \phi_j^\mu \delta x_j = 0$
(2.1.1)

11. Fliehkraftpendel mit Lagrange II
12. Doppelpendel
13. Optimale Rutsche
14. Wirkungsfunktional
15. Erhaltungsgrößen mit Lagrange II
16. Rayleighsche Dissipationsfunktion

Lagrange Gl. 2. Art:

holonome Zwangsbedingungen: $f_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$

$\Rightarrow$ generalisierte Koordinaten: $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$
(2.1.4)

Euler-Lagrange-Gl.: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \;,\; L = T - V$
(2.1.5)

$j = 1, \dots, f$

konservative Kräfte $\underline{X}_i = -\underline{\nabla}_{r_i} V$

Hamiltonsches Wirkungsprinzip: (2.2)

$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q, \dot{q}, t)$ mit $\delta W = 0$

nichtholonom: $\int_{t_1}^{t_2} dt (\delta T + \underbrace{\delta A}_{= \sum_i \underline{X}_i \cdot \delta \underline{r}_i}) = 0$

17. Erhaltungsgrößen und Symmetrien
18. Drehmatrizen
19. Noether-Theorem: helikoide Symmetrie
20. Noether-Theorem: Invarianz unter Zeittranslation

21. Longitudinale Molekülschwingungen

Integral der Bewegung: (3)

$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{ds} h_i^s(q) \right)_{s=0}$

$\frac{d}{ds} L(q(s,t), \dot{q}(s,t)) = 0 = \frac{d}{dt} I(q, \dot{q})$

Noether-Theorem

Translationsinvarianz $\rightarrow$ Impulserhaltung

Rotationsinvarianz $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung

Zeittranslationsinvarianz $\rightarrow$ Energieerhaltung

22. Legendre-Transformation
23. Hamilton-Formalismus: Fadenpendel
24. Weihnachtsmann auf Kugel
25. Fliehkraftpendel im Hamilton-Formalismus

Hamiltonscher kanonischer Formalismus

Legendre-Transformation von L (4.1)

$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t) \;,\; p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

Hamiltonsche Gleichungen: $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \;,\; \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$
(4.2)

konservative Kräfte: $H = T + V$

26. Kanonische Transformation I
27. Kanonische Transformation II
28. Poisson-Klammern
29. Poisson-Theorem
30. Poisson-Klammer und kanonische Transformation
31. Liovillescher Satz

Bei Hamiltonschen Zeitentwicklung ist das Phasenraumvolumen erhalten (4.5)

kanonische Transformationen (4.3)

$(q,p) \longrightarrow (\underline{Q},\underline{P})$

Legendre-Trafo. bzgl. q

Erzeugende: $M_1(q,\underline{Q},t)$, $M_2(q,\underline{P},t)$, $M_3(p,\underline{Q},t)$, $M_4(p,\underline{P},t)$

Legendre-Trafo. bzgl. $\underline{Q}$

$\underline{\underline{M}} = \{M_{\alpha\beta}\}$, $M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$, $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$

symplektische Matrix (4.4)

metrischer Tensor

Poisson-Klammern: (4.6)

$\frac{dg}{dt} = \{g,H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$, $\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$

32. Starrer Körper: Trägheitstensor des homogenen Quaders
33. Starrer Körper II "Drehmoment $\perp$ Drehimpuls"

34. Trägheitsmoment der homogenen Kugel