English Summary

4.7 Hamilton-Jacobi equation

Idea: identify conserved quantities

canonical transformation $(q,p) \to (Q,\underline{P})$

principal function $S = F_2(q,P,t)$

$$\Rightarrow H(q,p,t) \longrightarrow \bar{H}(Q,P,t) = H\Big(q_1,\dots,q_s,\underset{\uparrow\, p_1}{\frac{\partial S}{\partial q_1}},\dots,\underset{\uparrow\, p_s}{\frac{\partial S}{\partial q_s}},t\Big) + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0$$

Hamilton-Jacobi differential equation

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}\,,\quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$$

$$\Rightarrow \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = 0 \Rightarrow P_k = \alpha_k = \text{const}\,,\quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = 0 \Rightarrow Q_k = \beta_k = \text{const}$$

determine $\underline{\alpha},\underline{\beta}$ via initial conditions

$H = H(q,p) \Rightarrow W = S + Et = \int (L+H)\,dt$ abbreviated action $W = W(q;P)$

5 Mechanik des starren Körpers

Bisher betrachtet: Systeme von Massenpunkten

Jetzt: ausgedehnte, starre Körper

im Gegensatz zur Mechanik deformierbarer Medien (Elastomechanik, Hydrodynamik)

Definition des starren Körpers:

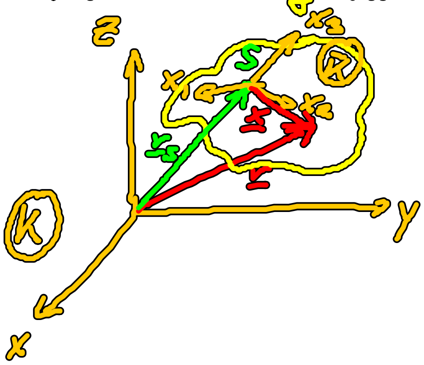
(A) System von n Massenpunkten mit <u>festen</u> Abständen zueinander (Zwangsbedingungen)

oder

(B) Vorgegebene, kontinuierliche Massenverteilung $\rho(\underline{r})$

Gesamtmasse $M = \int \rho(\underline{r})\, d^3r$

Beschreibung der beteiligten Koordinaten:



(i) Raumfestes Koordinatensystem K
(Inertialsystem) : (x, y, z)

(ii) Körperfestes Koordinatensystem $\bar{K}$
(fest mit dem Körper verbunden, i.e. kein Inertialsystem) : (x_1, x_2, x_3)

Ursprung von $\bar{K}$: S (z.B. Schwerpunkt)

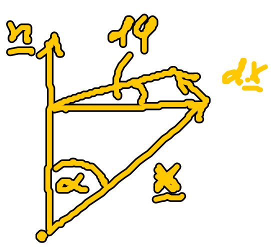
Zahl der Freiheitsgrade des starren Körpers : $f = 6$

(3 Komponenten von $\underline{r}_S$, 3 Winkel zur Orientierung von $\bar{K}$)

→ Vgl. Kap. 2.1.1

5.1 Kinetische Energie und Trägheitstensor

Infinitesimale Verrückung : $d\underline{r} = d\underline{r}_S + \underbrace{d\underline{\varphi} \times \underline{x}}_{d\underline{x}}$



↑ Translation

← Rotation um den Winkel φ mit Drehachse $\underline{n}$: $d\underline{\varphi} = \underline{n}\, d\varphi$

→ Vgl. infinitesimale Drehung (Kap. 3.3 „Räumliche Isotropie") am Bsp. der passiven Drehung, hier: aktive Drehung ⇒ anderes Vorzeichen!

Sei $\underline{V} := \dfrac{d\underline{r}_S}{dt}$ Schwerpunktsgeschwindigkeit

und $\underline{\omega} := \dfrac{d\underline{\varphi}}{dt}$ Winkelgeschwindigkeit

$$\Rightarrow \boxed{\underline{v} = \underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{x}}$$ Geschwindigkeit eines Aufpunktes des starren Körpers.

NB: $\underline{\omega}$ hängt nicht von der Wahl von S ab! Nur $\underline{x}$ ist bzgl. S gemessen.

Für S als Schwerpunkt gilt: (A) $\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{x}^{(i)} = \underline{0}$

bzw. (B) $\underbrace{\int d^3x\, \underline{x}\, \rho(\underline{x}) = \underline{0}}_{\text{Schwerpunktsvektor im körperfesten System } \bar{K}}$

Kinetische Energie:

(A) $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\underline{v}^{(i)}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{(i)}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{=M} V^2 + \underbrace{\underline{V}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{x}^{(i)}\right)}_{=(\underline{V}\times\underline{\omega})\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{x}^{(i)}}_{=\underline{0}}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{x}^{(i)}\right)^2$$

$\underline{V}^2 = \underline{V}\cdot\underline{V} = |\underline{V}|^2 = V^2$

Spatprodukt $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = (\underline{b}\times\underline{c})\cdot\underline{a} = (\underline{c}\times\underline{a})\cdot\underline{b}$

$=\underline{0}$ Schwerpunktsdefinition

$$\text{Mit } (\underline{\omega}\times\underline{X})^2 = \omega^2 x^2 \sin^2\alpha = \omega^2 x^2 (1-\cos^2\alpha) = \omega^2 x^2 - (\underbrace{\underline{\omega}\cdot\underline{x}}_{\omega x \cos\alpha})^2$$

α: Winkel zwischen $\underline{\omega}$ und $\underline{X}$

$$= \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu \left[x^2\delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu\right]\omega_\nu$$

folgt:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu J_{\mu\nu}\,\omega_\nu}$$

mit dem Trägheitstensor

$$J_{\mu\nu} := \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\underline{x}^{(i)}\right)^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)}\right]$$

durch die Massenverteilung bestimmt

(B) $$T = \frac{1}{2}\int d^3x\, \rho(\underline{x})\left(\underline{V} + \underline{\omega}\times\underline{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int d^3x\, \rho(\underline{x})}_{=M} V^2 + (\underline{V}\times\underline{\omega})\cdot\underbrace{\int d^3x\, \rho(\underline{x})\,\underline{x}}_{=\underline{0}} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu J_{\mu\nu}\,\omega_\nu$$

$$\text{mit } J_{\mu\nu} := \int d^3x\, \rho(\underline{x})\left[x^2\delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu\right]$$

Also gilt die Zerlegung der kinetischen Energie:

$$\boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{=T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}}_{=T_{rot}}}$$

(Translationsbewegung) (Rotationsbewegung)

5.2 Eigenschaften des Trägheitstensors

$\underline{\underline{J}}$ ist ein <u>Tensor 2. Stufe</u>, d.h. unter Drehungen $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$ ($\underline{\underline{R}}$: Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$, orthogonal, $\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$, $\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$, $\det \underline{\underline{R}} = 1$, vgl. Kap. 3.2) transformiert er sich wie folgt:

Wenn $\quad x_\mu \to x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} R_{\mu\nu} x_\nu$

dann $\quad J_{\mu\nu} \to J'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{3} \sum_{\sigma=1}^{3} R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} J_{\lambda\sigma}$

kompakt: $\boxed{\begin{aligned} &\underline{x} \to \underline{x}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{x} \\ &\underline{\underline{J}} \to \underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{R}}^T \end{aligned}}$

Erst das Transformationsverhalten definiert einen <u>Tensor</u>.
(im Unterschied zu einer Matrix = Zahlenschema mit Zeilen und Spalten)

Tensor 1. Stufe : Vektor : $A'_\mu = \sum_{\lambda=1}^{3} R_{\mu\lambda} A_\lambda$

Tensor 2. Stufe : $\quad A'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda,\sigma} R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} A_{\lambda\sigma}$

$\vdots$

Tensor n-ter Stufe: $\quad \underbrace{A'_{\mu\nu\ldots\xi}}_{n\text{-mal}} = \sum_{\lambda\sigma,\ldots,\tau} \underbrace{R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \cdots R_{\xi\tau}}_{n\text{-mal}} A_{\lambda\sigma\ldots\tau}$

Beweis des Tensor-Transformationsverhaltens für $\underline{\underline{J}}$:

$$J_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\sum_\tau x_\tau^{(i)2} \right) \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)} \right]$$

$$x'_\mu = \sum_\lambda R_{\mu\lambda} x_\lambda \Rightarrow \sum_\tau x'^2_\tau = \sum_\tau \sum_\lambda \sum_\sigma R_{\tau\lambda} R_{\tau\sigma} x_\lambda x_\sigma$$

$$= \sum_\lambda \sum_\sigma \underbrace{\left(\sum_\tau R^T_{\lambda\tau} R_{\tau\sigma} \right)}_{=\delta_{\lambda\sigma}} x_\lambda x_\sigma = \sum_\lambda x_\lambda^2$$

$\Rightarrow$ Das Skalarprodukt ist invariant.

$\delta_{\mu\nu}$ ist ebenfalls invariant: $\sum_{\lambda\sigma} R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\sigma} = \sum_\lambda R_{\mu\lambda} R^T_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}$

(kompakt: $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{1}}$)

Also:

$$\sum_\lambda \sum_\sigma R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} J_{\lambda\sigma} = \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_\lambda \sum_\sigma R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \left(x^{(i)2} \delta_{\lambda\sigma} - x_\lambda^{(i)} x_\sigma^{(i)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\underbrace{\left(x^{(i)\prime}\right)^2}_{\text{invarianter Anteil}} \delta_{\mu\nu} - \underbrace{x_\mu^{(i)\prime} \; x_\nu^{(i)\prime}}_{\text{hängt von der Wahl von } \bar{K} \text{ ab}} \right] = J'_{\mu\nu}$$

Trägheitstensor in neuen Koordinaten.