

English summary:

5.2 Properties of inertia tensor (continued)

inertia tensor given for principal axes

(mass centroid axes)

: diagonal $\underline{J}' = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \underline{R} \underline{J} \underline{R}^T$
 \underline{J}_i : principal moments of inertia

\Rightarrow Eigenvalue problem: $\underline{J} \underline{\omega}^{(n)} = J_i \underline{\omega}^{(n)}$
 Eigenvalue Eigenvektor

moment of inertia for given axis \underline{a} : $J(\underline{a}) = \underline{a} \underline{J} \underline{a}$, e.g. $\underline{\omega} = \underline{a} \omega$: $T = \frac{1}{2} \omega^2 J(\underline{a})$

Parallel axis theorem (Huygens-Steiner theorem):

coordinate system \bar{K}' = coordinate system \bar{K} shifted by vector \underline{a}
 $\Rightarrow J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M (a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu)$

5.3 Drehimpuls und Bewegungsgleichungen

Drehimpuls:

(A) diskrete Massenpunkte:

Schwerpunktschwindigkeit

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i \times \underline{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\underline{r}_S + \underline{x}^{(i)}) \times (\underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{(i)})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i (\underline{r}_S \times \underline{V})}_{=M} + \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \underline{x}^{(i)} \times \underline{V}}_{=0 \leftarrow \text{Schwerpunktsatz} \rightarrow =0} + \underline{r}_S \times (\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \underline{x}^{(i)}}_{=0}) + \sum_{i=1}^n m_i \underline{x}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}^{(i)})$$

$$= \underbrace{M \underline{r}_S \times \underline{V}}_{\text{Schwerpunktsdrehimpuls}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \underline{x}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}^{(i)})}_{\text{Relativedrehimpuls } \underline{L}}$$

(B) Kontinuierliche Massenverteilung $\rho(\underline{x})$: Gesamtmasse

$$\underline{L} = \dots = \underline{r}_S \times M \underline{V} + \underbrace{\int d^3x \rho(\underline{x}) \underline{x} \times (\underline{\omega} \times \underline{x})}_{\underline{L}}, \quad M = \int d^3x \rho(\underline{x})$$

Mit der (bac-cab)-Regel $(\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ folgt:

Relativdrachimpuls:
$$\underline{L} = \int d^3x \rho(\underline{x}) \left[x^2 \underline{\omega} - (\underline{x} \cdot \underline{\omega}) \underline{x} \right]$$

$$= \int d^3x \underline{\omega}$$

denk in Komponenten gilt:
$$L_\mu = \sum_{\nu=1}^3 \int d^3x \rho(\underline{x}) \left[x^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu \right] \omega_\nu$$

Bsp: 1. Komponente:
$$L_1 = \sum_{\nu=2}^3 \int d^3x \rho(\underline{x}) \left[x^2 \delta_{1\nu} - x_1 x_\nu \right] \omega_\nu$$

$$= \int d^3x \rho(\underline{x}) \left[\sum_{\nu=2}^3 x^2 \delta_{1\nu} \omega_\nu - x_1 \sum_{\nu=2}^3 x_\nu \omega_\nu \right]$$

$$= \int d^3x \rho(\underline{x}) \left[x^2 \omega_1 - x_1 (\underline{x} \cdot \underline{\omega}) \right]$$

NB: Im allgemeinen ist \underline{L} nicht parallel zu $\underline{\omega}$, nur falls $\underline{\omega}$ in Richtung einer Hauptträgheitsachse liegt.

Allgemeine Bewegungsgleichungen für Gesamtdrehimpuls:

$$\frac{d}{dt} \underline{L} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i, \quad (\underline{F}_i: \text{äußere, eingepögte Kräfte, Resultierender Kraft}$$

$$\underline{F}(\underline{r}_S) = \sum_i \underline{F}_i \text{ wirkt auf den Schwerpunkt.})$$

$$= \sum_i m_i \underline{r}_i \times \frac{\underline{F}_i}{m_i} \quad \left(\frac{\underline{F}_i}{m_i} = \frac{\underline{F}(\underline{r}_S)}{M} \right)$$

$$= \underline{r}_S \times \underline{F}(\underline{r}_S)$$

Schwerpunktsbewegung: $M \ddot{\underline{r}}_S = \underline{F}(\underline{r}_S)$ (Schwerpunktsimpulssatz)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L} = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\underline{r}_S \times M \dot{\underline{r}}_S}_{\substack{\text{Schwerpunkts-, Relativ-} \\ \text{Drachimpuls}}} + \underline{L} \right) = M \underbrace{\dot{\underline{r}}_S \times \dot{\underline{r}}_S}_{=0} + \underbrace{\underline{r}_S \times M \ddot{\underline{r}}_S}_{\substack{=0 \\ \underline{F}(\underline{r}_S)}} + \frac{d}{dt} \underline{L} \stackrel{!}{=} \underline{r}_S \times \underline{F}(\underline{r}_S) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{0}}$$

zeitliche Ableitung im Koordinatensystem mit raumfesten Achsen K

Transformation von $\frac{d}{dt}$ ins Körperfeste, rotatorisch mitbewegte System

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \right)' + \underline{\omega} \times \quad (\text{vgl. Kap. 1.3 "Beschleunigte Bezugssysteme"})$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\dot{L}} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{0}} \quad \text{mit } \underline{\cdot} = \left(\frac{d}{dt} \right)'$$

Mit $\underline{L} = \underline{J} \underline{\omega}$ folgt im Körperfesten System:

$$\boxed{\underline{J} \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{J} \underline{\omega} = \underline{0}}$$

Eulersche Gleichungen für kräftefreien Kreisel
(im Schwerpunktsystem)
($\underline{\dot{J}} = \underline{0}$, nichtlineare Differentialgleichungen in $\underline{\omega}$)

Im Hauptträgheitsachsen system: $\underline{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$

$$(1) J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3$$

$$(2) J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1$$

$$(3) J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2$$

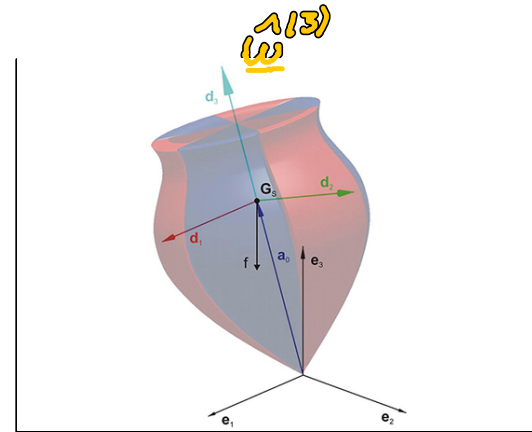
Bsp.: Symmetrischer Kreisel ($J_1 = J_2 = J \neq J_3$)

$$(3) \Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0 \quad (\text{wegen } J_1 - J_2 = 0)$$

$\Rightarrow \omega_3 = \text{const}$ im mitrotierenden System

$$(1) \Rightarrow J \dot{\omega}_1 = (J - J_3) \omega_2 \omega_3$$

$$\Rightarrow J \dot{\omega}_1 = (J - J_3) \dot{\omega}_2 \omega_3 + (J - J_3) \omega_2 \dot{\omega}_3$$



$$\stackrel{(*)}{=} (J - J_2) \underbrace{\left(\frac{J_3 - J}{J} \right)}_{=\dot{\omega}_2} \omega_3 \omega_1 \omega_3 = 0$$

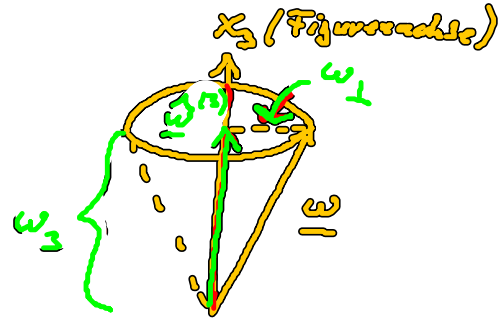
$$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 = - \left(\frac{J - J_2}{J} \omega_3 \right)^2 \omega_1 \quad (\text{harmonische Schwingung})$$

Lösung: $\omega_1 = \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\omega_2 = -\omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\omega_3 = \frac{J - J_2}{J} \omega_3$, $\omega_{\perp}, \varphi_0$: Anfangskonstanten

$$\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) = \omega_{\perp}^2 = \text{const.}$$

$$\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) \stackrel{\uparrow}{=} \omega_{\perp}^2 + \omega_3^2 = \text{const.}$$

$\omega_3 = \text{const.}$



$\underline{\omega}$ und damit auch \underline{L} (wegen $\underline{L} = \underline{J} \underline{\omega}$, $L_i = J_i \omega_i$) rotieren um die Figurenachse $\underline{f} \parallel x_3$.

Geometrische Veranschaulichung im Schwerpunktsystem mit

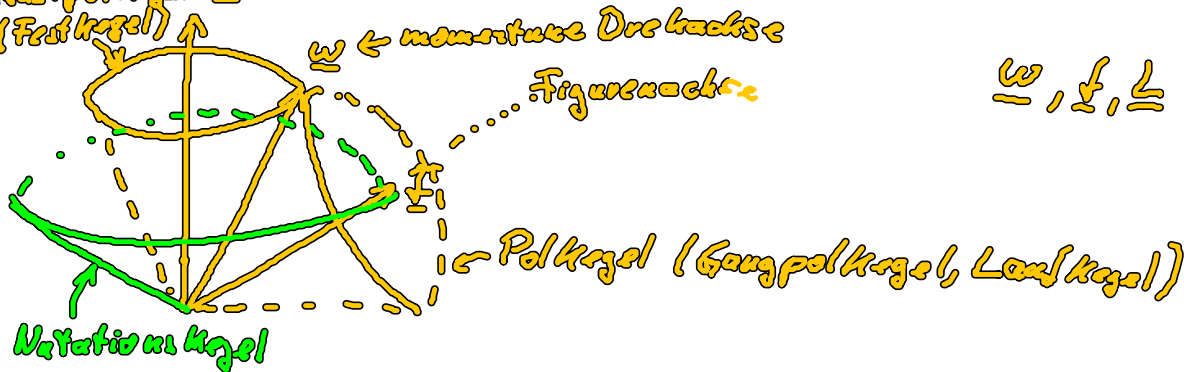
raumfesten Achsen: $\frac{d}{dt} \underline{L} = 0 \Rightarrow \underline{L} = \text{const.}$

Raupolkegel \underline{L}
(Festkegel)

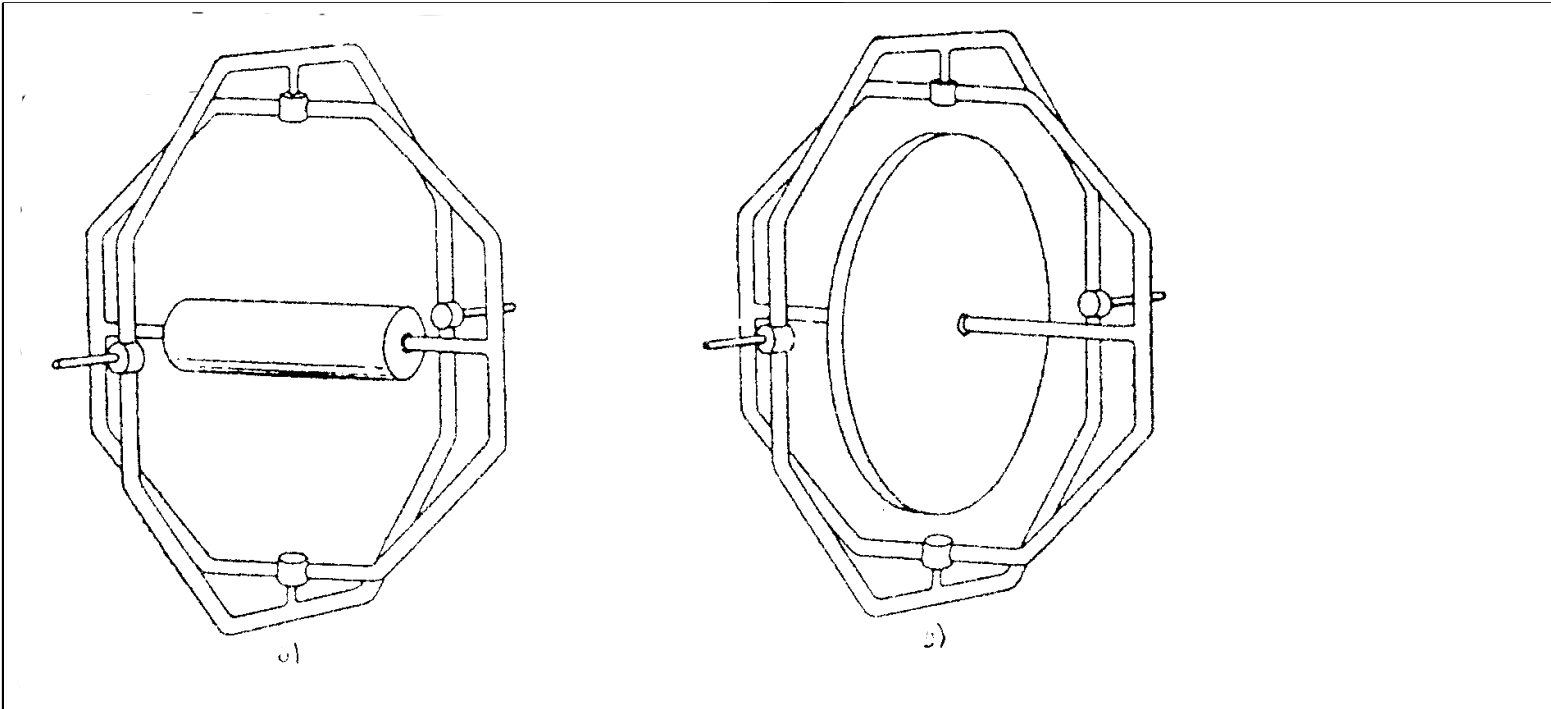
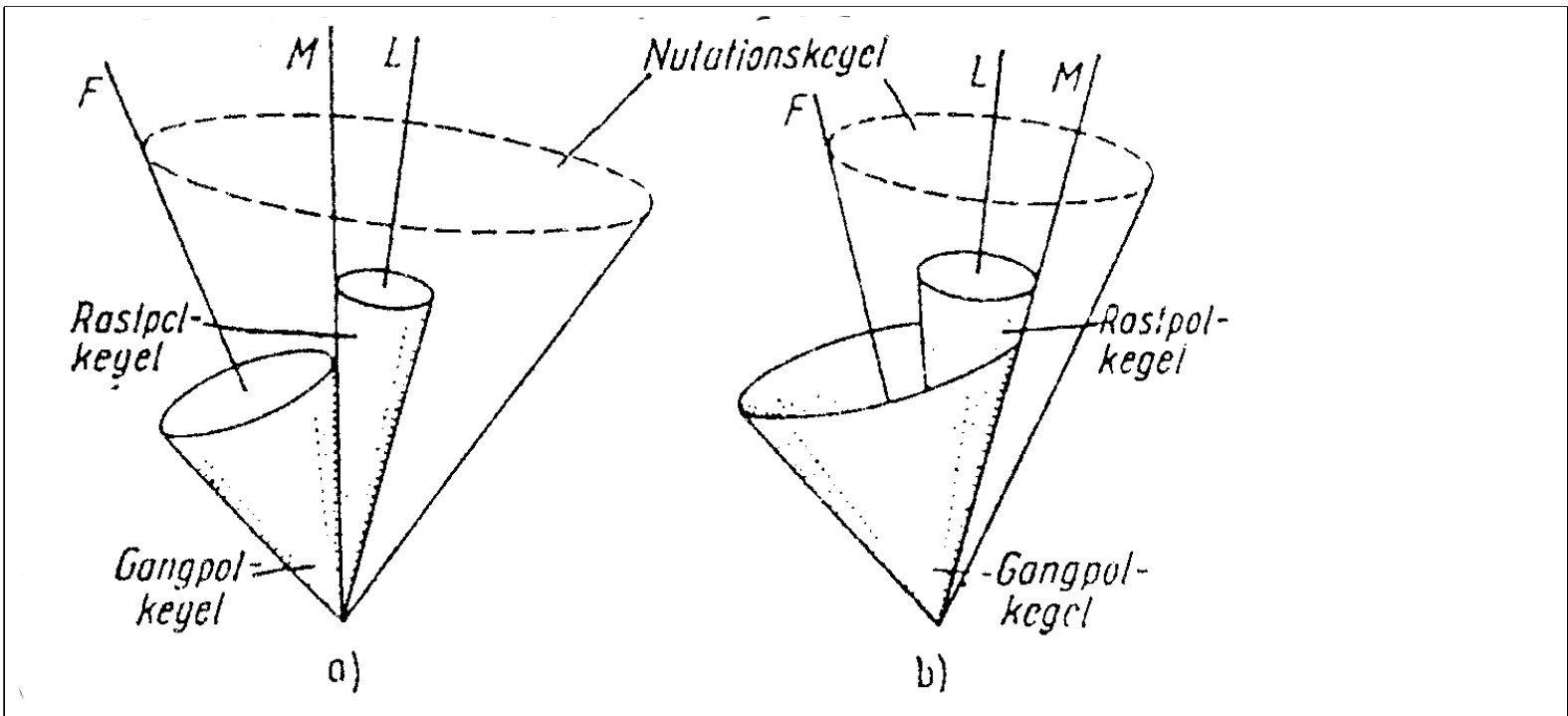
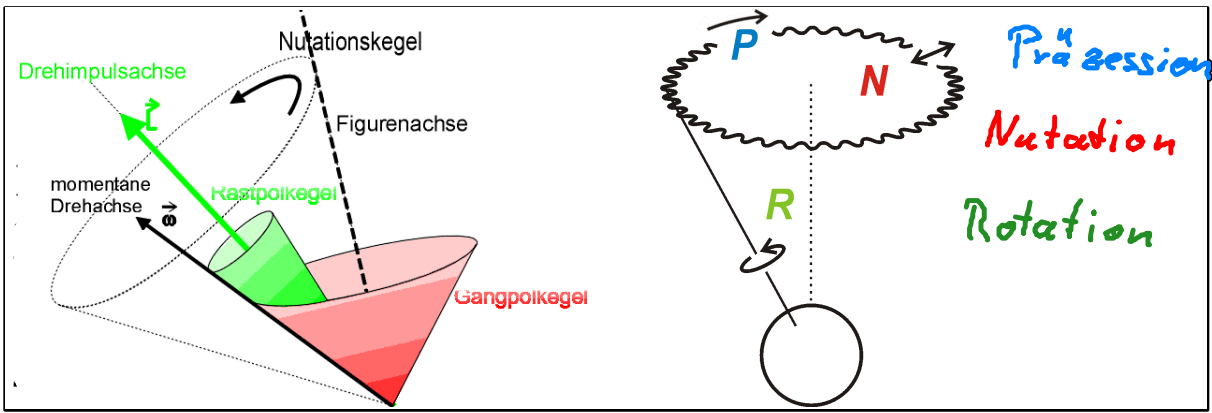
$\underline{\omega} \leftarrow$ momentane Drehachse

Figurenachse

$\underline{\omega}, \underline{f}, \underline{L}$ stets in 1 Ebene



$\underline{\omega}$ und \underline{f} präzidieren um die raumfeste \underline{L} -Achse



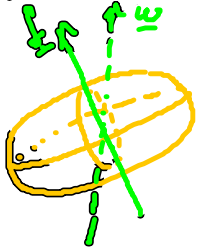
(a) abgeplattete Kreisel:

(b) verhängender Kreisel:

geometrische Figuren achse
= Hauptträgheitsachse mit dem
größten Trägheitsmoment

geometrische Figuren achse
= Hauptträgheitsachse mit dem
kleinsten Trägheitsmoment

Anwendung: Erdrotation (Erde als abgeplattetes Rotationsellipsoid)



wichtig

$$\frac{I_3 - I}{I} \approx \frac{1}{300}, \quad \frac{2\pi}{\omega_3} = 1 \text{ Tag}$$

$$\Rightarrow \text{Präzessionsperiode } T = \frac{2\pi}{\omega_p} \approx 300 \text{ Tage}$$