English Summary:

5.3 Angular momentum & equations of motion

(A) discrete: $\underline{\ell} = M(\underline{r}_S \times \underline{V}) + \sum_i m_i \underline{X}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{X}^{(i)})$

(B) continuous: $\underline{\ell} = \underline{r}_S \times M\underline{V} + \underbrace{\int d^3x\, \rho(\underline{x})\underline{x} \times (\underline{\omega} \times \underline{x})}_{\underline{L} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}}$

center of mass angular momentum; $\underline{L} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$ ($\underline{\underline{J}}$ tensor of moments of inertia) relative angular momentum

Euler's equations (rigid body dynamics, gyroscope):

$$\boxed{\underline{\underline{J}}\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = 0}$$ in center-of-mass reference frame $\bar{K}$

in fixed lab frame K: $\frac{d}{dt}\underline{L} = 0 \overset{\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)' + \underline{\omega}\times}{\Longrightarrow} \dot{\underline{L}} + \underline{\omega} \times \underline{L} = 0$

in rotating ref. frame $\bar{K}$

6. Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Lorentz-Transformation (Relativist. Kinematik)

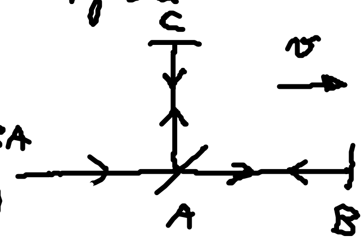
Michelson-Morley-Experiment (1887):

Prüfung der Äther-Hypothese
(Die Erde bewegt sich mit Geschw. $\underline{v}$ relativ zu einem "Medium", in dem sich das Licht mit der konstanten Geschwindigk. c relativ zum Medium ausbreitet)

Laufzeitdifferenz der Signale AB und AC
(Galilei-Trafo)

$t_{ABA} - t_{ACA} \sim 10^{-8}\, t_{ABA}$

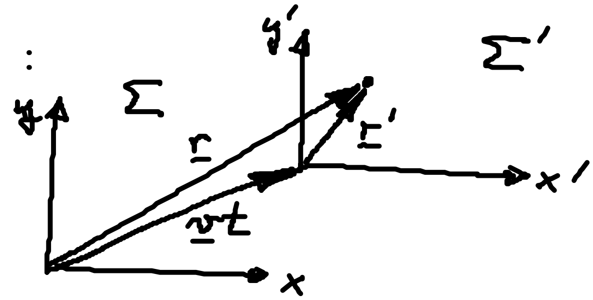
(wäre interferometrisch messbar)



<u>nicht</u> beobachtet!

<u>Erg.</u>: $\boxed{\text{Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit aus.}}$

Galilei-Transf.:



Lichtblitz breite sich vom Ursprung von Σ mit der Geschwind. c aus: $r = ct$

in Σ': $\underline{r}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{v}t$

$\Rightarrow c^2t^2 = r^2 = (\underline{r}' + \underline{v}t)^2 = r'^2 + 2\underline{r}'\cdot\underline{v}t + v^2t^2$

$\rightarrow r'^2 = (c^2 - v^2)t^2 - 2\underline{r}'\cdot\underline{v}t \neq c^2t^2$ für $v \neq 0$

Widerspruch zum Michelson-Morley-Experiment!

$\Rightarrow$ Konzept der <u>absoluten Zeit</u> aufgeben $\rightarrow$ spez. Relat.theorie
(gemeinsame Zeitrechnung in verschied. Inertialsystemen erfordert unendl. schnelle Signalausbreitung: unphysikalisch)

NB: Aufgabe des Konzeptes des <u>absol. Raumes</u> $\rightarrow$ allg. Relat.th.

<u>Postulat der speziellen Relativitätstheorie</u> (Einstein 1905):
„Zur Elektrodynamik bewegter Körper"

Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (<u>Relativitätsprinzip</u>).

<u>Konsequenz</u>: Galilei-Transformation ist zu verwerfen.
Klass. Mechanik ist abzuändern, da sie Galilei-invariant ist.

<u>Aufgabe</u> : Suche eine Transformation $\Sigma \to \Sigma'$, die folgende Forderungen erfüllt:

(i) <u>lineare</u> Transformation $(\underline{r}, t) \to (\underline{r}', t')$

Andernfalls wäre der Koord. ursprung physikal. ausgezeichnet.

(ii) Jeder Punkt $\underline{r}'(t') = \text{const}$ (ruhend in Σ') bewege sich mit $\underline{v}$ in Σ

Jeder Punkt $\underline{r}(t) = \text{const}$ (ruhend in Σ) bewege sich mit $-\underline{v}$ in Σ'.

(iii) Die Lichtgeschw. c sei in beiden Systemen <u>gleich</u>.

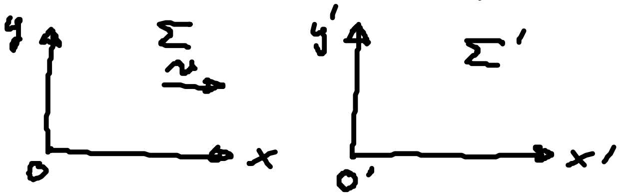
(iv) Keines der beiden Systeme sei vor dem anderen ausgezeichnet.

$$\underline{r} \to \underline{r}' = \underline{f}(\underline{r}, t\,;\, \underline{v}) \qquad \underline{v} \text{ Parameter}$$
$$t \to t' = g(\underline{r}, t\,;\, \underline{v})$$

Umkehrtransformation:

$$\left.\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{f}(\underline{r}', t'\,;\, -\underline{v}) \\ t &= g(\underline{r}', t'\,;\, -\underline{v}) \end{aligned}\right\} \text{mit den gleichen Fkt. en } f, g \text{ wegen (iv)}$$

<u>oBdA</u> :



- $(x=0, t=0) \to (x'=0, t'=0)$
- Aus Symmetriegründen : $y = y'$, $z = z'$ ($y < y'$ ergäbe z.B. Asymmetrie zwischen Σ, Σ' !)
- O' bewegt sich nach $x = vt$

<u>Ansatz</u> :

$$\left.\begin{aligned} x \to x' &= \gamma(x - vt) \quad (1) \\ x' \to x &= \gamma(x' + vt') \quad (2) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{wegen (ii), (i)} \\ &\quad \text{"} \quad \text{(iv)} \end{aligned}$$

Invarianz der Lichtgeschw. (iii)

$$x = ct \quad \to \quad x' = ct'$$

in (1) : $ct \to ct' = \gamma(c - v)t$

in (2) : $\qquad ct = \gamma(c + v)t'$

$$\Longrightarrow \qquad c^2 t' t = \gamma^2 t t' (c^2 - v^2)$$

$\Rightarrow \qquad \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad$ mit $\beta := \frac{v}{c}$

Für $v = 0$ muss sein: $\gamma = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Also:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow x'\sqrt{1-\beta^2} = x - vt = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - vt$$

$$vt = \sqrt{1-\beta^2}\left(-x' + \frac{x'+vt'}{1-\beta^2}\right)$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{-x' + x'\beta^2 + x' + vt'}{1-\beta^2}\right)$$

$$= \sqrt{1-\beta^2} \; \frac{x'\beta^2 + vt'}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{t' + x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{analog: } t' = \frac{t - x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Erg.: Lorentz-Transformation

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Zeit wird mittransformiert! Keine absolute Zeit!

Forderung: $1 - \frac{v^2}{c^2} \geq 0$, sonst imaginäre, d.h. unphys. Werte

$\Rightarrow |\underline{v}| \leq c$ Lichtgeschwindigk. kann nicht überschritten werden

<u>Entw. für $|\underline{v}| \ll c$:</u>

$\beta \ll 1 \Rightarrow \gamma \to 1 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}}$

Galilei-Trafo gültig für keine Geschwindigk.

Nichtrelativist. Mechanik gilt für $|\underline{v}| \ll c$!

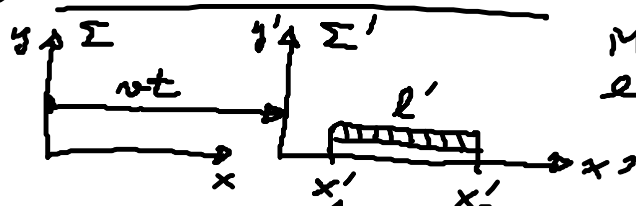
Eigenschaften der Lorentz-Transformation

a) Lorentz-Invariante

$$\begin{aligned}
\underline{r}'^2 - c^2t'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \\
&= \gamma^2(x^2 - \cancel{2xvt} + v^2t^2) + y^2 + z^2 \\
&\quad - \gamma^2c^2\left(t^2 - \cancel{\frac{2xvt}{c^2}} + \frac{x^2v^2}{c^4}\right) \\
&= \frac{x^2 + v^2t^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2t^2 + x^2\beta^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \\
&= \frac{(x^2 - c^2t^2)(1-\beta^2)}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \\
&= \underline{r}^2 - c^2t^2
\end{aligned}$$

d.h. Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw. c (Lichtblitz in O) sind invariant

b) Lorentz-Kontraktion



Maßstab ruht in Σ' (Länge l') erscheint in Σ als bewegter Maßstab verkürzt ($l < l'$)

Länge in Σ': $l' = x_2' - x_1'$ (Ruhelänge)

Länge in Σ : $l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1') = \frac{l'}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\, l' < l'$

<u>Aber</u> : Lorentz-Kontraktion wird nicht <u>gesehen</u>, da Laufzeit der Lichtstrahlen von verschiedenen Punkten des Objekts zu berücksichtigen ist

$\Rightarrow$ keine Kontraktion, sondern Verdrehung

<u>Visualisierung</u> : Hanns Ruder (Tübingen)
Ruder & Nollert, Spektrum der Wiss., Juli 2005

c) <u>Zeit-Dilatation</u>

zwei zeitliche Ereignisse am selben Ort $x=0$ in Σ haben den Zeitabstand $\Delta t = t_2 - t_1$ in Σ. OBdA: $t_1 = 0$.
Im bewegten System Σ' finden sie an verschiedenen Orten $x_1' = 0$ und $x_2' = -\frac{v t_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ statt
und haben, in Σ' gemessen, den Zeitabstand

$$\Delta t' = t_2' - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{t_1'} = \frac{t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t$$

Der zeitliche Abstand erscheint von Σ' aus gesehen gedehnt.

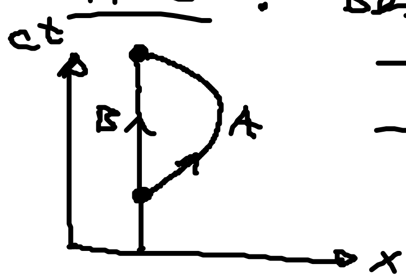
<u>Uhrenvergleich</u> : Eine in Σ ruhende Uhr scheint in Σ' langsamer zu laufen.

<u>Zwillingsparadoxon</u> : Nach längerer Reise kehrt A zu B zurück.

Von Σ aus gesehen müsste der reisende Zwilling A jünger sein (Reisen hält jung!)

Wegen Symm. gilt <u>scheinbar</u> auch dasselbe für B von A aus gesehen.

<u>Aber</u> : Beschleunigung und Abbremsung von A



$\longrightarrow$ kein Inertialsystem
$\longrightarrow$ keine Symmetrie $A \Leftrightarrow B$
(A ist wirklich jünger)

Exp. a) Zerfall von Myonen, die mit 0.99 c in der oberen Atmosphäre erzeugt werden
b) Messung der Zeitdilatation mit Atomuhren in Verkehrsflugzeugen

d) Additionstheorem für Geschwindigkeit

Σ' : Geschw. $\underline{u'}$

Σ : ?

$u_x' = \frac{dx'}{dt'}$,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \gamma\left(\frac{dx'}{dt} + v\frac{dt'}{dt}\right) = \gamma\left(\underbrace{\frac{dx'}{dt'}}_{u_x'} + v\right)\frac{dt'}{dt}$$

mit $\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)$ folgt:

$$\Longrightarrow \boxed{u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}}$$

(i) für $\left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$, $\left|\frac{u_x'}{c}\right| \ll 1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{u_x = u_x' + v}$ galilei

(ii) für $|u_x'| \leq c$ $|v| \leq c$ $\Longrightarrow$ $|u_x| \leq c$

für $\underline{u_x' = v = c}$: $u_x = c$; sogar für $u_x' = c$: $\boxed{u_x = c}$