

English Summary:

5.3 Angular momentum & equations of motion

(A) discrete: $\underline{L} = M(\underline{r}_S \times \underline{V}) + \sum m_i \underline{X}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{X}^{(i)})$

(B) continuous: $\underline{L} = \underline{r}_S \times M \underline{V} + \int d^3x \rho(\underline{x}) \underline{x} \times (\underline{\omega} \times \underline{x})$

center of mass angular momentum $\underline{L} = \underline{J} \underline{\omega}$ (\underline{J} tensor of moments of inertia)
relative angular momentum

Euler's equations (rigid body dynamics, gyroscope):

$$\underline{J} \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{J} \underline{\omega} = \underline{0} \quad \text{in center-of-mass reference frame } \bar{K}$$

in fixed lab frame K : $\frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\dot{L}} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{0}$
in rotating ref. frame \bar{K}

6. Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Lorentz-Transformation (Relativist. Kinematik)

Michelson-Morley-Experiment (1887):

Prüfung der Äther-Hypothese

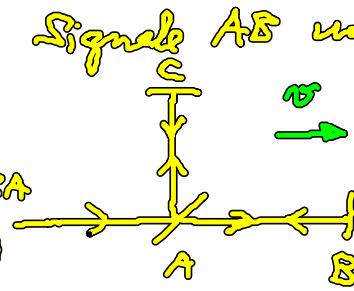
(Die Erde bewegt sich mit Geschw. v relativ zu einem "Medium", in dem sich das Licht mit der konstanten Geschwindigkeit c relativ zum Medium ausbreitet)

Laufzeitdifferenz der Signale AB und AC

(Galilei-Trifo)

$$t_{ABA} - t_{ACA} \sim 10^{-8} t_{ABA}$$

(wäre interferometrisch messbar)

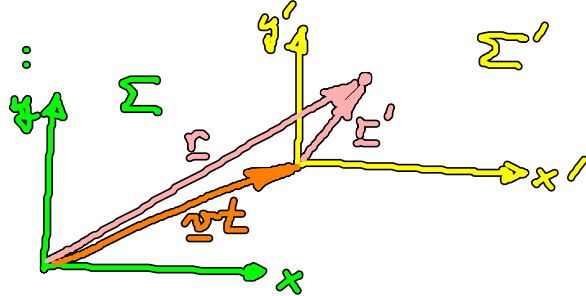


nicht beobachtet!

Erq.:

Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit aus.

Galilei-Transf.:



Lichtblitz breitet sich vom Ursprung von Σ mit der Geschwindigkeit c aus: $r = ct$

in Σ' : $\underline{r}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{v}t$

$$\Rightarrow c^2 t^2 = r^2 = (r' + vt)^2 = r'^2 + 2r' \cdot vt + v^2 t^2$$

$$\rightarrow r'^2 = (c^2 - v^2)t^2 - 2r' \cdot vt + c^2 t^2 \quad \text{für } v \neq 0$$

Widerspruch zum Michelson-Morley-Experiment!

\Rightarrow Konzept der absoluten Zeit aufgeben \rightarrow spez. Relativtheorie

(gemeinsame Zeitrechnung in verschied. Inertialsystemen erfordert unendl. schnelle Signalausbreitung: unphysikalisch)

NB: Aufgabe des Konzeptes des absol. Raumes \rightarrow allg. Relat.th.

Postulat der speziellen Relativitätstheorie (Einstein 1905):

„Zur Elektrodynamik bewegte Körper“

Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (Relativitätsprinzip).

Konsequenz: Galilei-Transformation ist zu verwerfen. Klass. Mechanik ist abzulehnen, da sie galilei-invariant ist.

Aufgabe : Suche eine Transformation $\Sigma \rightarrow \Sigma'$, die folgende Forderungen erfüllt:

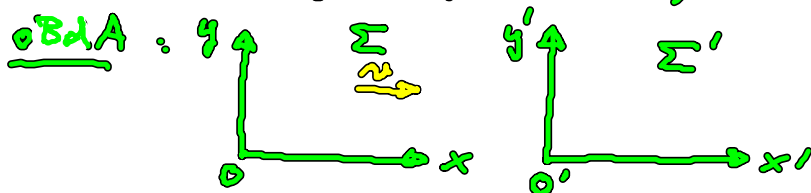
- (i) lineare Transformation $(\underline{r}, t) \rightarrow (\underline{r}', t')$
 Andernfalls wäre der Kov. Ursprung physikal. ausgezeichnet.
- (ii) Jeder Punkt $\underline{r}'(t') = \text{const}$ (ruhend in Σ') bewege sich mit \underline{v} in Σ
 Jeder Punkt $\underline{r}(t) = \text{const}$ (ruhend in Σ) bewege sich mit $-\underline{v}$ in Σ' .
- (iii) Die Lichtgeschw. c sei in beiden Systemen gleich.
- (iv) Keines der beiden Systeme sei vor dem anderen ausgezeichnet.

$$\underline{r} \rightarrow \underline{r}' = f(\underline{r}, t; \underline{v}) \quad \underline{v} \text{ Parameter}$$

$$t \rightarrow t' = g(\underline{r}, t; \underline{v})$$

Umkehrtransformation:

$$\left. \begin{aligned} \underline{r} &= f(\underline{r}', t'; -\underline{v}) \\ t &= g(\underline{r}', t'; -\underline{v}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{mit den gleichen Fkt.en } f, g \\ \text{wegen (iv)} \end{array}$$



- $(x=0, t=0) \rightarrow (x'=0, t'=0)$
- Aus Symmetriegründen : $y=y', z=z'$
 ($y < y'$ ergäbe z.B. Asymmetrie zwischen Σ, Σ' !)
- O' bewegt sich nach $x = vt$

Ansatz : $x \rightarrow x' = \gamma(x - vt)$ (1) wegen (ii), (i)
 $x' \rightarrow x = \gamma(x' + vt')$ (2) " (iv)

Invarianz der Lichtgeschw. (iii)

$$x = ct \rightarrow x' = ct'$$

$$\text{in (1) : } ct \rightarrow ct' = \gamma(c - v)t$$

$$\text{in (2) : } ct = \gamma(c + v)t'$$

$$\Rightarrow c^2 t' t = \gamma^2 t t' (c^2 - v^2)$$

$$\Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit } \beta := \frac{v}{c}$$

Für $v=0$ muss sein: $\gamma=1$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Also:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow x' \sqrt{1-\beta^2} = x - vt = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - vt$$

$$vt = \sqrt{1-\beta^2} \left(-x' + \frac{x' + vt'}{1-\beta^2} \right)$$

$$= \sqrt{1-\beta^2} \left(\frac{-x' + x/\beta^2 + x' + vt'}{1-\beta^2} \right)$$

$$= \sqrt{1-\beta^2} \frac{x/\beta^2 + vt'}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{analog: } t' = \frac{t - x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Eig.: Lorentz-Transformation

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Zeit wird mittransformiert! Keine absolute Zeit!

Forderung: $1 - \frac{v^2}{c^2} \geq 0$, sonst imaginäre, d.h. unphys. Werte

$$\rightarrow |\underline{v}| \leq c$$

Lichtgeschwindigkeit kann nicht überschritten werden

Entw. für $|\underline{v}| \ll c$:

$$\beta \ll 1 \Rightarrow \gamma \rightarrow 1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x' = x - vt \\ t' = t \end{matrix}}$$

Galilei-Transform. gültig für keine Geschwindigkeit.

Nichtrelativist. Mechanik gilt für $|\underline{v}| \ll c$!

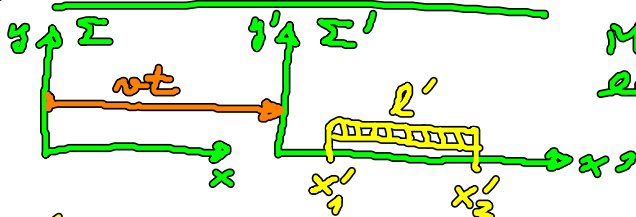
Eigenschaften der Lorentz-Transformation

a) Lorentz-Invarianz

$$\begin{aligned} \underline{r}'^2 - c^2 t'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \\ &= \gamma^2 (x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 \\ &\quad - \gamma^2 c^2 (t^2 - \frac{2xvt}{c^2} + \frac{x^2 v^2}{c^2}) \\ &= \frac{x^2 + v^2 t^2}{1 - \beta^2} - \frac{c^2 t^2 + x^2 \beta^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2 \\ &= \frac{(x^2 - c^2 t^2)(1 - \beta^2)}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2 \\ &= \underline{r}^2 - c^2 t^2 \end{aligned}$$

d.h. Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw. c (Lichtblitz in \mathcal{O}) sind invariant

b) Lorentz-Kontraktion



Maßstab ruht in Σ' (Länge l') erscheint in Σ als bewegte Maßstab verkürzt ($l < l'$)

Länge in Σ' : $l' = x_2' - x_1'$ (Ruhelänge)

Länge in Σ : $l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} (x_2' - x_1') = \frac{l'}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} l' < l'$

Aber: Lorentz-Kontraktion wird nicht gesehen, da Laufzeit der Lichtstrahlen von verschiedenen Punkten des Objekts zu berücksichtigen ist

⇒ keine Kontraktion, sondern Verabehrung

Visualisierung: Hans Ruder (Tübingen)

Ruder & Nollet, Spektrum der Wiss., Juli 2005

c) Zeit-Dilatation

Zwei zeitliche Ereignisse am selben Ort $x=0$ in Σ haben den Zeitabstand $\Delta t = t_2 - t_1$ in Σ . o.B.d.A. $t_1=0$.
Im bewegten System Σ' finden sie an verschiedenen

Orten $x'_1=0$ und $x'_2 = -\frac{vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ statt

und haben, in Σ' gemessen, den Zeitabstand

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t$$

Der zeitliche Abstand erscheint von Σ' aus gedehnt.

Uhrenvergleich: Ein in Σ ruhende Uhu

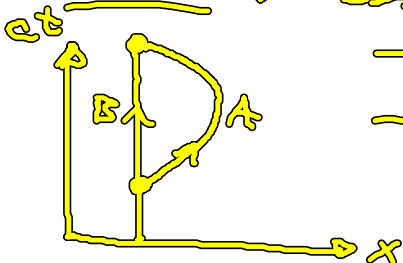
scheint in Σ' langsamer zu laufen.

Zwillingsparadoxon: Nach längerer Reise kehrt A zu B zurück.

Von Σ aus gesehen wirkt der reisende Zwilling A jünger sein (Reisen hält jung!)

Wegen Symm. gibt scheinbar auch derselbe für B von A aus gesehen.

Aber: Beschleunigung und Abbremsung von A



→ kein Inertialsystem

→ keine Symmetrie $A \leftrightarrow B$
(A ist wirklich jünger)

- Exp. a) Zerfall von Myonen, die mit $0.99c$ in der oberen Atmosphäre erzeugt werden
 b) Messung der Zeitdilatation mit Atomuhren in Verkehrsflugzeugen

d) Additionstheorem für Geschwindigkeit

Σ' : Geschw. \underline{u}'

Σ : ?

$u'_x = \frac{dx'}{dt'}$

$u_x = \frac{dx}{dt} = \gamma \left(\frac{dx'}{dt'} + v \frac{dt'}{dt} \right) = \gamma \left(\frac{dx'}{dt'} + v \right) \frac{dt'}{dt}$

mit $\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)$ folgt:

$$\Rightarrow u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

(i) Für $|\frac{v}{c}| \ll 1, |\frac{u'_x}{c}| \ll 1 \Rightarrow u_x = u'_x + v$ Galilei.

(ii) Für $|u'_x| \leq c, |v| \leq c \Rightarrow |u_x| \leq c$

Für $\underline{u'_x = v = c} : u_x = c$; sogar für $u'_x = c : u_x = c$