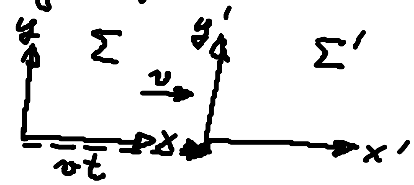
English Summary:

6.1 Special Relativity – Lorentz Transform

Principle of Relativity: All inertial systems are equivalent, velocity of light invariant

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$

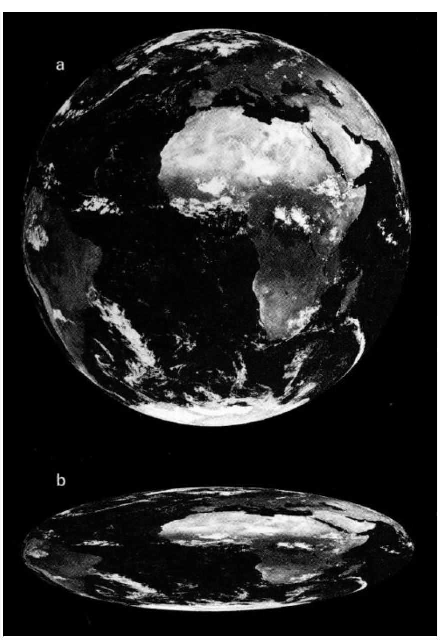
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$



Lorentz contraction: $l = \frac{1}{\gamma} l' < l'$

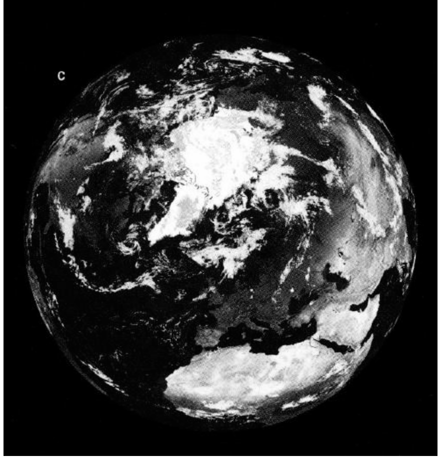
Time dilation : $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$

Addition of velocities : $u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$



Vorbeiflug an der Erde mit 95% der Licht-geschw.

Längen-kontraktion



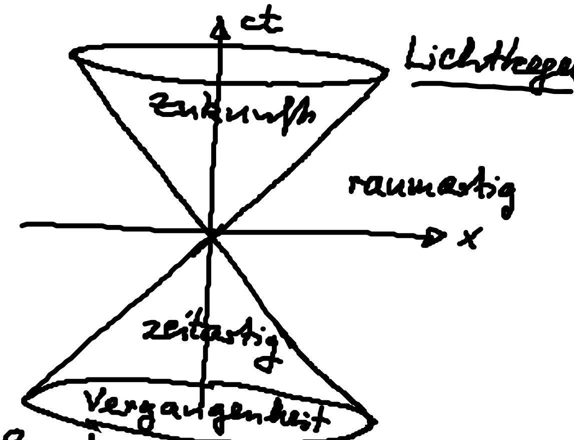
bewegter Beobachter sieht Kugel aber verzerrte Oberfläche (Teile der Rückseite)

[Ruder & Nollert, Spektrum der Wissensch. Juli 2005]

6.2 Vierervektoren und Minkowski-Raum

geometrische Veranschaulichung von Ereignissen (x,y,z,t) im Raum-Zeit-Kontinuum (Minkowski-Raum): Die Lorentz-Transformation lässt $x^2+y^2+z^2-(ct)^2$ invariant.

Lichtkegel : $x^2+y^2+z^2-(ct)^2=0$

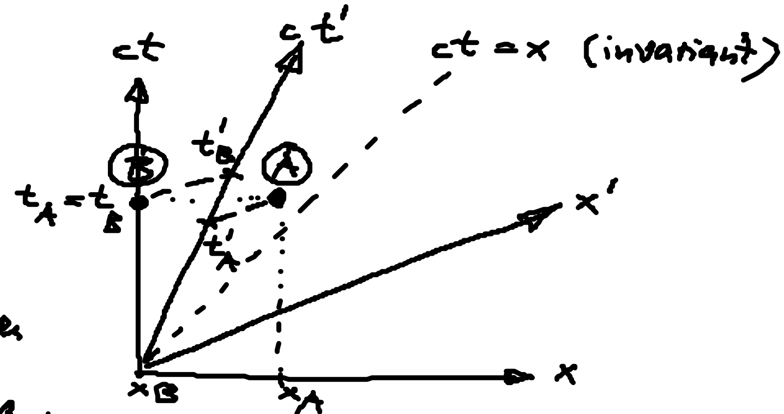


Die Bewegungen eines Massenpunktes ergibt im (x,y,z,ct)-Raum eine Weltlinie.

Bei konstanter Geschw.: $x=\beta ct$ Gerade (verläuft wegen $\beta<1$ innerhalb des Lichtkegels)

Gleichzeitigkeit:

Zwei Ereignisse A, B an Orten x_A, x_B seien gleichzeitig



Im Lorentz-transformierten Inertialsystem Σ'

$$\left(\begin{array}{llll} x'\text{-Achse}: t'=0 & \Rightarrow x = \frac{1}{\beta}ct & \Rightarrow & ct = \beta x < x \\ ct'\text{-Achse}: x'=0 & \Rightarrow x = \beta ct & \Rightarrow & ct = \frac{1}{\beta}x > x \end{array}\right)$$

sind sie nicht mehr gleichzeitig.

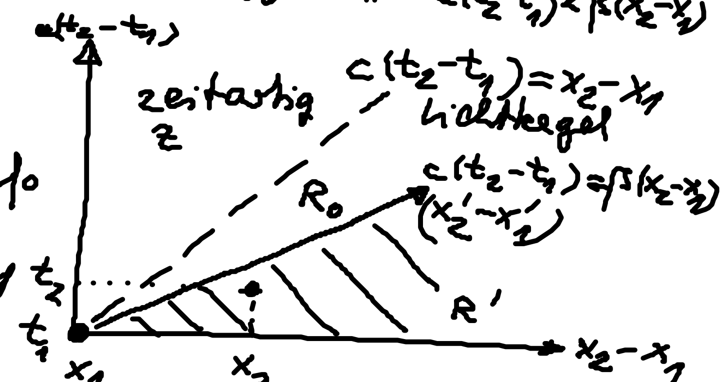
Kausalitätsprinzip

Reihenfolge zweier Ereignisse an den Orten x_1, x_2 in Σ: $t_1 < t_2$

Reihenfolge in Σ':

$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{falls } c(t_2-t_1) > \beta(x_2-x_1) \\ \text{"} \quad c(t_2-t_1) < \beta(x_2-x_1) \end{matrix}$$

Für raumartige Ereignisse
$(c(t_2 - t_1) < (x_2 - x_1))$
lässt sich eine Lorentz-Trafo finden, so dass beide Ereignisse gleichzeitig sind
$\left(\beta = \frac{c(t_2-1)}{x_2 - x_1}\right)$



oder dass die Reihenfolge sogar umgedreht wird
$\left(\beta > \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1}\right)$ für alle Ereignisse $(x_2, x_1) \in R'$

Aber:

- nur zeitartige Ereignisse können sich kausal beeinflussen, da eine Signalübertragung mit $v < c$ möglich ist; deren Reihenfolge wird nicht geändert, also kein Widerspruch zum Kausalitätsprinzip.

- Raumartige Ereignisse können sich nicht kausal beeinflussen.

Formalisierung der Weltlinien:

Der raum-zeitliche Abstand ds

$$(ds)^2 := (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$$

bleibt invariant bei Lorentz-Trafo zwischen Inertialsystemen.

Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von Vierervektoren (Zeit-Ort) im Minkowski-Raum V und stelle die Lorentz-Trafo als lineare orthogonale Trafo in V dar, die das Skalarprodukt invariant lässt:

Def.: kontravariante Komponenten des Vierervektors

$x^0 := ct$

x^i, $i = 1,2,3$: kartesische Komp. des Ortsvektors $\underline{r}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

nichteuklid. Skalarprodukt!

(Euklid. Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit euklid. Metrik:)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{(x, y, z)}_{\text{Zeilenvektor}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{metrischer Tensor}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

$$g_{ij} = 1$$

hier:

nichteuklid. Raum V, metr. Tensor:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich schreiben:

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu$$

Vereinfachung durch $dx_\mu := \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\nu$

Def.: <u>kovariante Komponenten</u> des Vierervektors

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &:= x^0 \\ x_i &:= -x^i \end{aligned}} \quad i = 1,2,3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} (ds)^2 &= dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu \equiv \underbrace{dx^\mu dx_\mu} \end{aligned}}$$

Einstein'sche Summationskonvention:
wenn Index oben (kontravar.) und unten (kovar.) auftritt

Verallgemeinerung auf beliebige Vierervektoren a^i:

$$a_0 = a^0, \quad a_i = -a^i \quad (i = 1,2,3)$$

Alle <u>Lorentz-Invarianten</u> lassen sich als Skalarprodukte $a^\mu a_\mu$ schreiben.

<u>zeitartige</u> Vierervektoren: $x^\mu x_\mu > 0$
(alle von O erreichbaren Weltvektoren)

<u>raumartige</u> Vierervektoren: $x^\mu x_\mu < 0$

<u>Lorentz-Transform</u> (linear, homogen): $\Sigma \to \Sigma'$

$$\boxed{x'^\mu = U^\mu{}_\nu x^\nu} \quad \text{mit} \quad U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeile Spalte $\quad (v \parallel x^1)$

$$x'_\mu = g_{\mu\lambda} x'^\lambda = \underbrace{g_{\mu\lambda} U^\lambda{}_\kappa g^{\kappa\nu}}_{U_\mu{}^\nu} x_\nu \qquad U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

„Heben oder Senken der Indizes" durch $g^{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}$:

Mit $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ gilt auch $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$ $\quad (g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu})$

ausführlich $\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

Invarianz des Skalarprodukts:

$$\left.\begin{aligned} x'^\mu &= U^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= U_\mu{}^\lambda x_\lambda \end{aligned}\right\} \; x'^\mu x'_\mu = U^\mu{}_\nu U_\mu{}^\lambda x^\nu x_\lambda \overset{!}{=} x^\nu x_\nu$$

$$\Longrightarrow U^\mu{}_\nu U_\mu{}^\lambda = (U^T)_\nu{}^\mu U_\mu{}^\lambda \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(transponierte Matrix U^T: Zeile $\Leftrightarrow$ Spalte vertauscht)

$\Rightarrow U^T U = \mathbb{1}$, d.h. $U^T = U^{-1}$, d.h. U ist orthogonal

Also ist $U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ die inverse Lorentz-Trafo

zu $U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (\beta = \frac{v}{c} \to -\beta)$

Die Lorentz-Transformationen $U(\beta)$ zur Geschwindigkeit $v = \beta c$ bilden eine Gruppe (Lorentz-Gruppe) mit der Verknüpfung

$$U(\alpha) \cdot U(\beta) = U_{\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}}$$ (relativist. Add. theorem der Geschwind.)

$$\boxed{\begin{aligned} x^\mu &= U_\nu{}^\mu x'^\nu \\ x_\mu &= U^\nu{}_\mu x'_\nu \end{aligned}}$$

Gruppenaxiome:

(i) Assoziativgesetz $U(\alpha)\big(U(\beta)U(\gamma)\big) = \big(U(\alpha)U(\beta)\big)U(\gamma)$

(ii) Es ex. ein Einselement $U(0) = \mathbb{1}$

(iii) Zu jedem $U(\beta)$ ex. eine Inverse $U(\beta)^{-1}$