

English Summary:

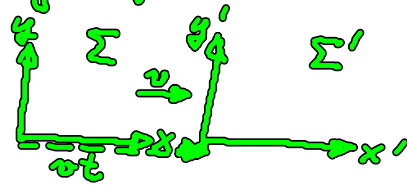
6.1 Special Relativity - Lorentz Transformations

Principle of Relativity: All inertial systems are equivalent, velocity of light invariant

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

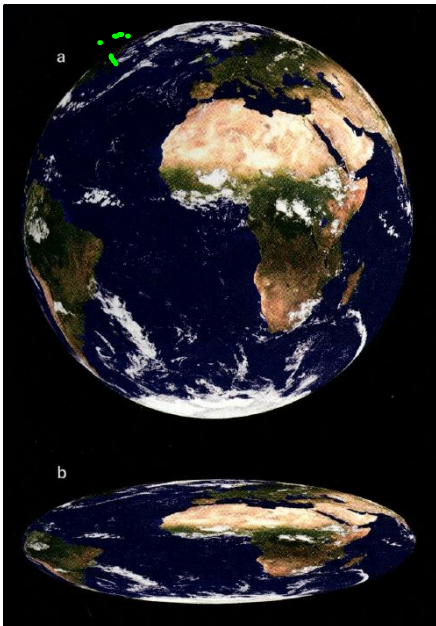
$$\beta = \frac{v}{c}$$



Lorentz contraction: $l = \frac{1}{\gamma} l' < l'$

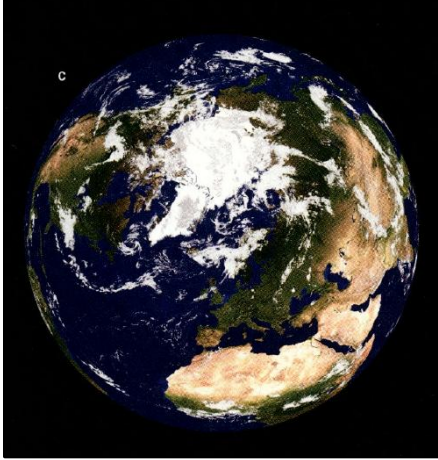
Time dilation: $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$

Addition of velocities: $u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$



Vorbeiflug an
der Erde
mit
95% der
Licht-
geschw.

Längen-
kontraktion



bewegter
Beobachter
sieht Kugel
aber
vererrte
Oberfläche
(Teile der Rückseite)

[Ruder & Nollert,
Spektrum der
Wissenschaft
Juli 2005]

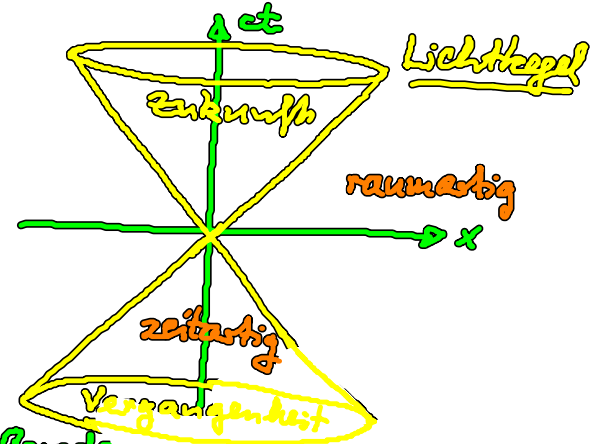
6.2 Vierervektoren und Minkowski-Raum

geometrische Veranschaulichung von Ereignissen (x, y, z, t)
im Raum-Zeit-Kontinuum (Minkowski-Raum):
Die Lorentz-Transformation lässt $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$
invariant.

Lichtkegel : $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$

Die Bewegungen eines
Massenpunktes ergibt
in (x, y, z, ct) -Raum
eine Weltlinie.

Bei konstanter Geschw.: $x = \beta ct$ Gerade
(verläuft wegen $\beta < 1$ innerhalb des Lichtkegels)



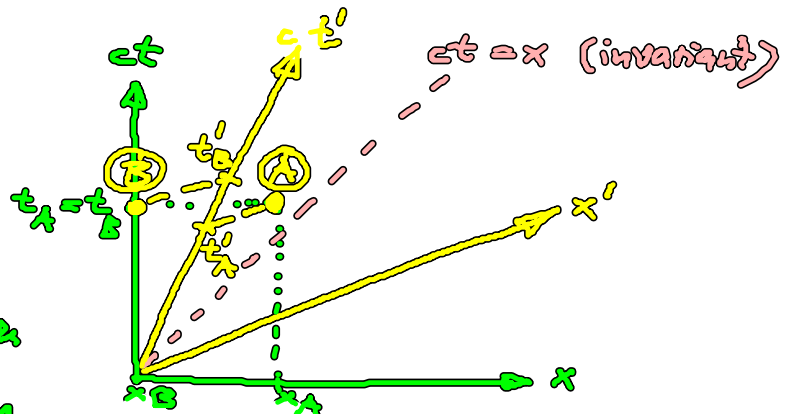
gleichzeitigkeit:

Zwei Ereignisse A, B
an Orten x_A, x_B
sind gleichzeitig

Im Lorentz-transformierten
Inertialsystem Σ'

$$\left(\begin{array}{l} x' \text{-Achse: } t' = 0 \Rightarrow x = \beta ct \Rightarrow ct = \beta x < x \\ ct' \text{-Achse: } x' = 0 \Rightarrow x = \beta ct \Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x > x \end{array} \right)$$

sind sie nicht mehr gleichzeitig.



Kausalitätsprinzip

Reihenfolge zweier Ereignisse an den Orten x_1, x_2
in Σ : $t_1 < t_2$

Reihenfolge in Σ' :

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right] > 0 \quad \text{falls } c(t_2 - t_1) > \beta(x_2 - x_1)$$
$$< 0 \quad \text{falls } c(t_2 - t_1) < \beta(x_2 - x_1)$$

Für raumartige Ereignisse

$$(c(t_2 - t_1) < (x_2 - x_1))$$

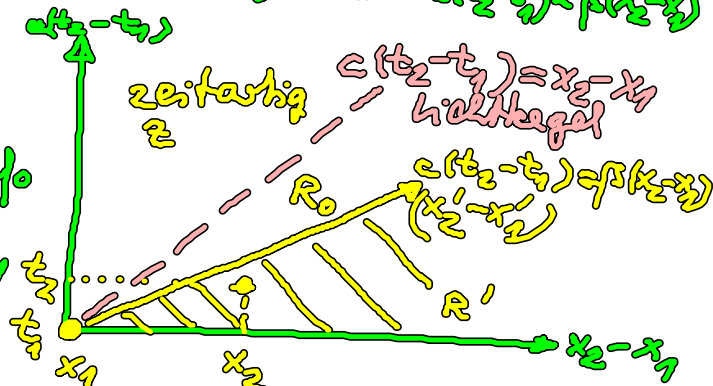
lässt sich eine Lorentz-Transfo
finden, so dass beide

Ereignisse gleichzeitig sind

$$\left(\beta = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} \right)$$

oder dass ihre Reihenfolge sogar umgedreht wird

$$\left(\beta > \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} \right) \text{ für alle Ereignisse } (x_2, t_2) \in R'$$



Aber:

- nur zeitartige Ereignisse können sich kausal beeinflussen, da eine Signalübertragung mit $v < c$ möglich ist, deren Reihenfolge nicht geändert wird, also kein Widerspruch zum Kausalitätsprinzip.

- Raumartige Ereignisse können sich nicht kausal beeinflussen.

Formalisierung der Weltlinien:

Der raum-zeitliche Abstand ds
 $(ds)^2 := (cdt)^2 - (dx)^2$

bleibt invariant bei Lorentz-Transf.
 zwischen Inertialsystemen.

Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von

Vierervektoren (Zeit-Ort) im Minkowski-Raum V

und stelle die Lorentz-Transf. als lineare orthogonale Transf. in V dar, die das Skalarprodukt invariant lässt:

Def.: kovariante Komponenten des Vierervektors

$$x^0 := ct$$

$x^i, i=1,2,3$: kartesische Komp. des Ortvektors \underline{r}

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

nicht-euklid. Skalarprodukt!

(Euklid. Vektorraum \mathbb{R}^3 mit euklid. Metrik:)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{(x, y, z)}_{\text{Zeilenvektor}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{metrischer} \\ \text{Tensor}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

$$g_{ij} = 1$$

hier:

nicht-euklid. Raum V , metr. Tensor:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich schreiben:

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu$$

Vereinfachung durch $dx_\mu := \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\nu$

Def.: kovariante Komponenten des Vierervektors

$$\begin{array}{l} x_0 := x^0 \\ x_i := -x^i \quad i=1,2,3 \end{array}$$

$$\Rightarrow (ds)^2 = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu \equiv dx^\mu dx_\mu$$

Einstein'sche Summationskonvention:
wenn Index oben (kontrav.) und unten (kovar.) auftritt

Verallgemeinerung auf beliebige Vierervektoren a^i :

$$a_0 = a^0, \quad a_i = -a^i \quad (i=1,2,3)$$

Alle Lorentz-Invarianten lassen sich als Skalarprodukte $a^\mu a_\mu$ schreiben.

zeitartige Vierervektoren: $x^\mu x_\mu > 0$
(alle von 0 erreichbaren Weltvektoren)

raumartige Vierervektoren: $x^\mu x_\mu < 0$

Lorentz-Transform (linear, homogen): $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

$$\boxed{x'^\mu = U^\mu_\nu x^\nu} \quad \text{mit } U^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
Zeile spalte
($\nu \parallel x^\nu$)

$$x'^\mu = g_{\mu\alpha} x'^\alpha = g_{\mu\alpha} U^\alpha_\nu x^\nu = \underbrace{g_{\mu\alpha} U^\alpha_\nu}_{U_\mu^\nu} x^\nu \quad U_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

„Heben oder Senken der Indizes“ durch $g^{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}$:

Mit $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ gilt auch $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$ ($g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$)
 ausführlich $\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

Invarianz des Skalarprodukts:

$$\left. \begin{aligned} x'^\mu &= U^\mu_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= U_\mu^\nu x_\nu \end{aligned} \right\} x'^\mu x'_\mu = U^\mu_\nu U_\mu^\lambda x^\nu x_\lambda = x^\nu x_\nu$$

$$\Rightarrow U^\mu_\nu U_\mu^\lambda = (U^T)^\lambda_\nu U^\mu_\mu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(transponierte Matrix U^T : Zeile \leftrightarrow Spalte vertauscht)

$\Rightarrow U^T U = 1$, d.h. $U^T = U^{-1}$, d.h. U ist orthogonal

Also ist $U_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ die inverse Lorentz-Transform.

zu $U^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ($\beta = \frac{v}{c} \rightarrow -\beta$)

Die Lorentz-Transformationen $U(\beta)$ zur Geschwindigkeit $v = \beta c$ bilden eine Gruppe (Lorentz-Gruppe) mit der Verknüpfung

$$U(\alpha) \cdot U(\beta) = U \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \quad (\text{relativ. Add. theorem der Geschwind.})$$

$$\begin{aligned} x^\mu &= U_\mu^\nu x'_\nu \\ x'_\mu &= U^\nu_\mu x_\nu \end{aligned}$$

Gruppenaxiome:

- (i) Assoziativgesetz $U(\alpha)(U(\beta)U(\gamma)) = (U(\alpha)U(\beta))U(\gamma)$
- (ii) \exists ex. ein Element $U(0) = 1$
- (iii) \exists zu jedem $U(\beta)$ ex. eine Inverse $U(\beta)^{-1}$