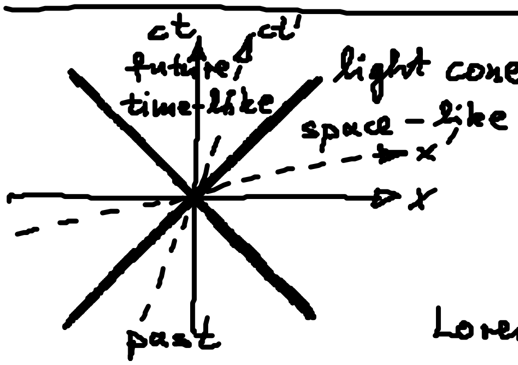
English Summary:

6.2 Four-vectors and Minkowski space



Minkowski space of events (world lines)

$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu \qquad x^0 = ct \qquad x_0 := x^0$

$x^i,\ i=1,2,3 \qquad x_i := -x^i$

contravariant covariant

Lorentz transform: $\boxed{x'^\mu = U^\mu{}_\nu x^\nu}$ $\quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ metric tensor

$$U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reverse transform: $x^\mu = U_\nu{}^\mu x'^\nu$

$$(U^T)^\nu{}_\mu = U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Relativistische Mechanik

Newton'sche Mechanik ist nicht Lorentz-invariant.

Jetzt: Lorentz-invariante Formulierung mit Hilfe von Vierervektoren u. Skalaren (= Invarianten).

Grenzfall $v \ll c$ soll klass. Mechanik ergeben.

Nichtrelativist. Bahn $\underline{r} = \underline{r}(t)$

Vierervektor $x^\mu(t)$: Parametrisierung der Weltlinie (ct, x, y, z) durch t ungeeignet, da sich t bei Lorentz-Trafo ändert.

Def.: Eigenzeit τ = Zeit im momentanen Ruhsystem (vom Teilchen mitgeführte Uhr) $\Rightarrow x^\mu(\tau)$

Bogenlänge der Weltlinie:

$$ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2dt^2 - (d\underline{r})^2)^{1/2}$$
$$= c\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$
$$= c(1-\beta^2)^{1/2}\, dt \qquad \beta := \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|$$
$$= c\,\frac{dt}{\gamma} \qquad \gamma := (1-\beta^2)^{-1/2}$$
$$= c\, d\tau$$

Lorentz-Trafo für $dx = 0$:
$d\tau \equiv dt' = \frac{dt}{\gamma}$
(momentanes Ruhsystem)

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{s}{c}}$$

Def.: Vierergeschwindigkeit

$$\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}} = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$ dimensionslos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Lorentz-invariant (da Skalar)
Einheitsvektor

Komponenten von $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt}$:

$$\boxed{\begin{aligned} u^0 &= \gamma \\ u^i &= \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} \end{aligned}} \quad i = 1,2,3 \qquad \begin{aligned} &\longrightarrow 1 \\ &\longrightarrow \frac{1}{c} v^i \end{aligned}$$

} nichtrelativist. Grenzfall $\beta \ll 1$:
v^i Teilchengeschw.

Def.: Viererimpuls

$$\boxed{p^\mu := m_0 c\, u^\mu} = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$$ mit Ruhemasse m_0

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u^\mu u_\mu}_{1} = m_0^2 c^2$$ Lorentz-invariant

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)\, c = p_0$$

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)\, v^i = -p_i \xrightarrow{\beta \ll 1} m_0 v^i \; \left(\frac{\text{nichtrel.}}{\text{Impuls}}\right)$$

$(i=1,2,3)$

mit geschwindigkeitsabh. Masse $\boxed{m(v) := \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$

$\xrightarrow{v\to c} \infty$

Es gilt:

$$(*) \quad \boxed{\frac{p^i}{p^0} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{v^i}{c}} \quad i=1,2,3$$

Zus.hang zwischen Impuls - Vierergeschw. - Teilchengeschw.

$p^\mu = (m_0 c)\, u^\mu \qquad u^0 = \gamma, \quad u^i = \frac{\gamma}{c} v^i$

Physikal. Bedeutung von p^0:

Verallgemeinerung des Newton'schen Grundgesetzes

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}\underline{p} \qquad \text{(nicht Lorentz-invar.!)}$$

auf relativist. Invariante:

Def: Viererkraft (Minkowski-kraft)

$$\boxed{f^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Leistungsbilanz:

aus $u^\mu u_\mu = 1$ folgt $\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2\frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = 0$

$$\Rightarrow f^\mu u_\mu = 0$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d}{d\tau} p^0 + \frac{\gamma}{c}\sum_{i=1}^{3} f^i v_i = \frac{\gamma}{c}\Big[\underbrace{\frac{d}{d\tau}(c p^0)} - \underbrace{\underline{f}\cdot\underline{v}}\Big] = 0$$

Änderung der Energie E = Leistung

Def.: relativist. Energie

$$\boxed{E := cp^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v)c^2}$$

somit $\boxed{p^0 = \frac{E}{c}}$ Energie

und $f^0 = \frac{1}{c}\underline{f}\cdot\underline{v}$ Leistung mit $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2 \quad \text{mit} \quad \underline{p} = \frac{m_0 \underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2} \iff E = \sqrt{c^2\underline{p}^2 + (m_0 c^2)^2}$$

nichtrelativistischer Grenzfall: $|\underline{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0^2 c^2} + \ldots\right)$$

$$\approx \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruhe-energie}} + \underbrace{\frac{\underline{p}^2}{2 m_0}}_{\text{kinet. Energie}} + \ldots$$

$\underline{p} = 0$: $E = m_0 c^2$

Äquivalenz v. Ruhemasse und Energie

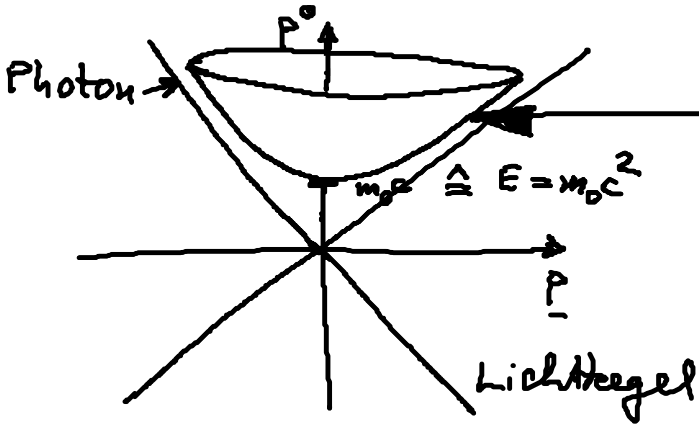
(Anwendung: Zerfall ruhender El.teilchen in Zerfallsprodukte mit kinet. Energie, z.B. $\pi^+ \to \mu^+ + \nu + E_{kin}^\nu$ (ca. 25% der π^+-Ruheenergie)

Kernfusion, Kernspaltung)

hochrelativist. Grenzfall: $m_0 = 0$ (z.B. Photon)

$E = c|\underline{p}|$, $p^\mu = (|\underline{p}|, \underline{p})$ mit $p^\mu p_\mu = 0$
(lichtartiger Vektor)

$v = c$ $\Longrightarrow$ u^μ nicht mehr definiert, da $\gamma \to \infty$
(wegen $|\underline{p}|/p^0 = |v|/c$)



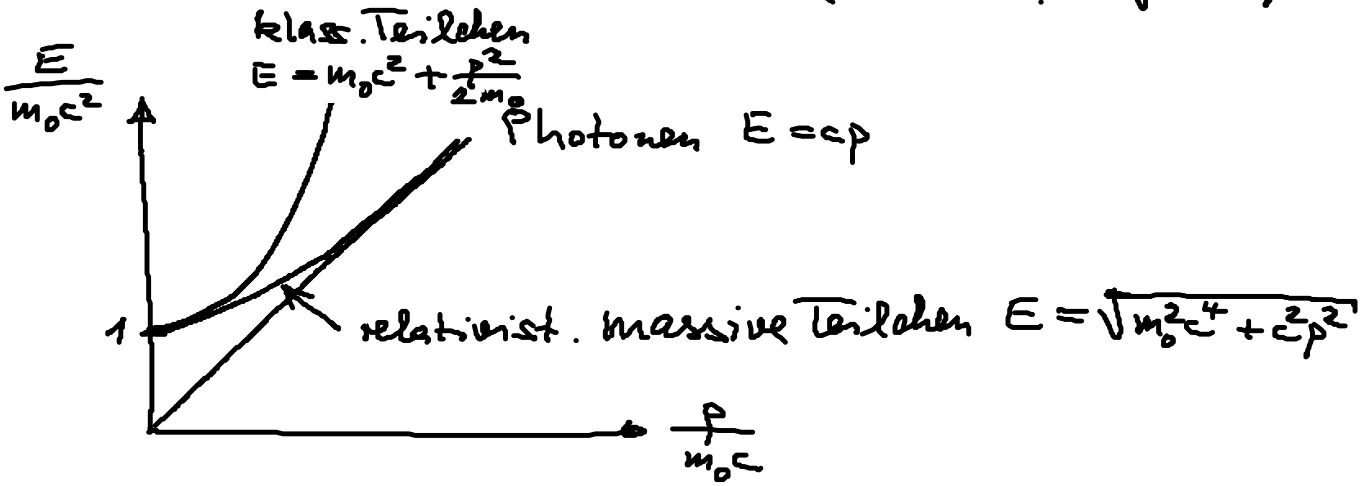
Massive Teilchen

p^μ liegt auf „Massenschale" (on shell)

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \underline{p}^2 = (m_0c)^2$$

Hyperboloid

(relativist. Energie-Impuls-Bez.)



Bem.: Übergang zur Quantentheorie des Photons

Welle-Teilchen-Dualismus

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Photon:} & \boxed{E = cp} \\ \text{Lichtwelle (Vakuum)} & \boxed{\omega = ck} \end{array}\right\}$$

DeBroglie-Beziehung

$E = \hbar\omega$

$p = \hbar k$

ω Kreisfrequenz

k Wellenzahl

$\hbar$ = Planck'sches Wirkungsquantum