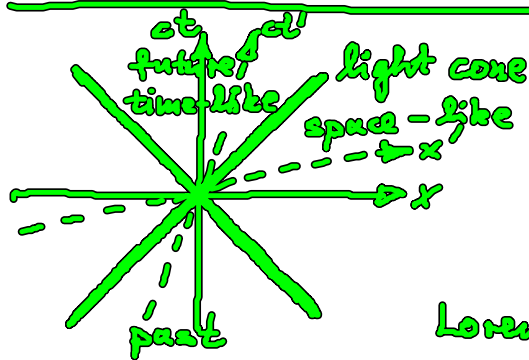


English Summary:

6.2 Four-vectors and Minkowski space



Minkowski space of events (world lines)

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu \quad x^0 = ct \quad x_0 := x^0$$
$$x^i, i=1,2,3 \quad x_i := -x^i$$

contravariant covariant

Lorentz transform: $x'^\mu = U^\mu_\nu x^\nu$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

metric tensor

$$U^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reverse transform: $x^\mu = U_\nu^\mu x'^\nu$

$$(U^\mu)^\nu_\rho = U_\rho^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Relativistische Mechanik

Newton'sche Mechanik ist nicht Lorentz-invariant.

Jetzt: Lorentz-invariante Formulierung mit Hilfe von Vierervektoren u. Skalaren (= Invarianten).

Grenzfall $v \ll c$ soll klass. Mechanik ergeben.

Nichtrelativist. Bahn $\underline{r} = \underline{r}(t)$

Vierervektor $x^\mu(t)$: Parametrisierung der Weltlinie
 (ct, x, y, z) durch t ungeeignet,
 da sich t bei Lorentz-Transform.
 ändert.

Def.: Eigenzeit τ = Zeit im momentanen Ruhesystem
 (von Teilchen mitgeführte Uhr) $\Rightarrow x^\mu(\tau)$

Bogenlänge der Weltlinie:

$$ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2 dt^2 - (d\mathbf{r})^2)^{1/2}$$

$$= c \left[1 - \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt$$

$$= c (1 - \beta^2)^{1/2} dt \quad \beta := \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

$$= c \frac{dt}{\gamma} \quad \gamma := (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$= c d\tau$$

Lorentz-Transform für $dx = 0$:
 $d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma}$
 (momentanes Ruhesystem)

$$\Rightarrow \tau = \frac{s}{c}$$

Def.: Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

dimensionlos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Lorentz-invariant
 (da Skalar)
 Einheitsvektor

Komponenten von $u^\mu = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^\mu}{dt}$:

$$\left. \begin{array}{l} u^0 = \gamma \\ u^i = \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 1 \\ \rightarrow \frac{1}{c} v^i \end{array} \quad i=1,2,3$$

nichtrelativist.
 Grenzfall $\beta \ll 1$:
 v^i Teilchengeschw.

Def.: Vieremomentum

$$p^\mu := m_0 c u^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

mit Ruhemasse m_0

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u^\mu u_\mu}_1 = m_0^2 c^2$$

Lorentz-invariant

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = m(v) c = p_0$$

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = m(v) v^i = -p_i \quad \beta \ll 1 \rightarrow m_0 v^i \quad \left(\begin{array}{l} \text{nichtrel.} \\ \text{Impuls} \end{array} \right)$$

(i=1,2,3)

mit geschwindigkeitsabh. Masse

$$m(v) := \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Es gilt:

$$(*) \quad \boxed{\frac{p^i}{p^0} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{v^i}{c}} \quad i=1,2,3$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ p^i = (m_0 c) u^i \quad u^0 = \gamma \\ u^i = \frac{v^i}{c} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} v \rightarrow c \\ \rightarrow \infty \end{array}$$

Zus.hang zwischen
Impuls - Vierergeschw.
- Teilchengeschw.

Physikal. Bedeutung von p^0 :

Verallgemeinerung des Newton'schen Grundgesetzes

$$\underline{F} = \frac{d}{dt} \underline{p} \quad (\text{nicht Lorentz-invar.!!})$$

auf relativist. Invariante:

Def: Viererkraft (Minkowskikraft)

$$\boxed{f^M := \frac{d}{d\tau} p^M} = m_0 \frac{d^2 x^M}{d\tau^2} = m_0 c \frac{d u^M}{d\tau}$$

Leistungsbilanz:

$$\text{aus } u^\mu u_\mu = 1 \quad \text{folgt} \quad \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = 2 \frac{d u^\mu}{d\tau} u_\mu = 0$$

$$\Rightarrow f^M u_M = 0$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d}{dt} p^0 + \frac{\gamma}{c} \sum_{i=1}^3 f^i v_i = \frac{\gamma}{c} \left[\frac{d}{d\tau} (c p^0) - \underbrace{f \cdot v} \right] = 0$$

Änderung der Energie E = Leistung

Def.: relativist. Energie

$$E := c p^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v) c^2$$

somit $p^0 = \frac{E}{c}$ Energie

und $\underline{f}^0 = \frac{1}{c} \underline{f} \cdot \underline{v}$ Leistung mit $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2 \quad \text{mit} \quad \underline{p} = \frac{m_0 \underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2} \quad \Leftrightarrow \quad E = \sqrt{c^2 \underline{p}^2 + (m_0 c^2)^2}$$

nichtrelativistischer Grenzfall: $|\underline{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots \right)$$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0} + \dots$$

Ruhe-energie kinet. Energie

$\underline{p} = 0 : E = m_0 c^2$
Äquivalenz v.
Ruhemasse
und Energie

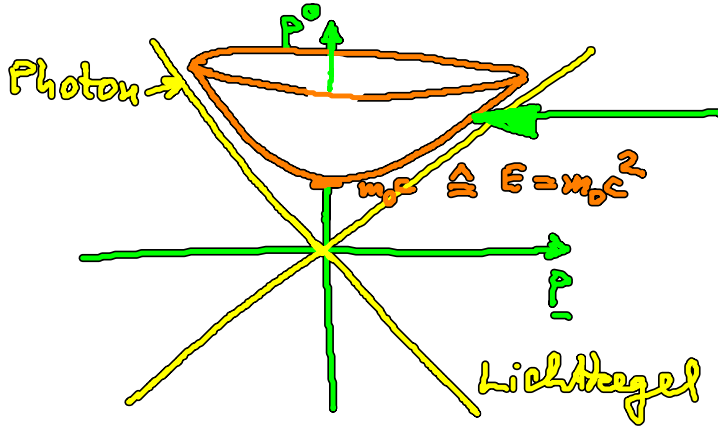
(Anwendung: Zerfall ruhender El. Teilchen
in Zerfallprodukte mit kinet. Energie,
z.B. $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu + E_{\text{kin}}^\nu$ (ca. 25% der
 π^+ -Ruhenergie)
Kernfusion, Kernspaltung

hochrelativist. Grenzfall: $m_0 = 0$ (z.B. Photon)

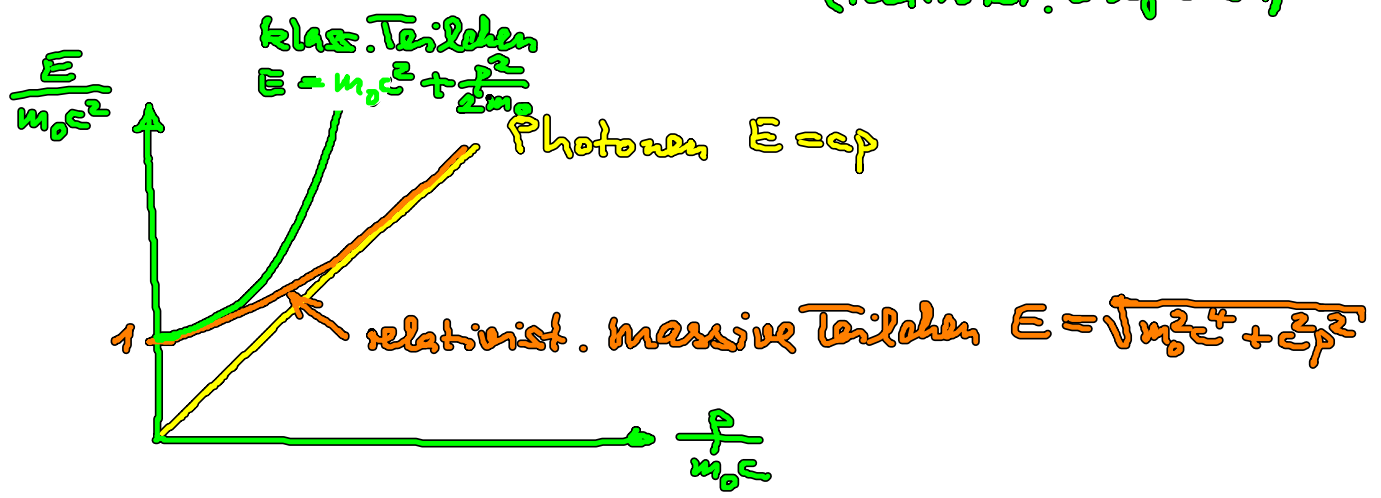
$$E = c |\underline{p}|, \quad p^\mu = (|\underline{p}|, \underline{p}) \quad \text{mit} \quad p^\mu p_\mu = 0$$

(lichtartigen Vektor)

$v = c \rightarrow u^\mu$ nicht mehr definiert, da $\gamma \rightarrow \infty$
(wegen $|\underline{p}|/p^0 = |\underline{v}|/c$)



Massive Teilchen
 p^μ liegt auf „Massenschale“
 (on shell)
 $(\frac{E}{c})^2 - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$
Hyperboloid
 (relativist. Energie-Impuls-Bez.)



Bem. : Übergang zur Quantentheorie des Photons

Welle-Teilchen-Dualismus

Photon : $E = cp$
 Lichtwelle (Vakuum) : $\omega = ck$
 ω Kreisfrequenz
 k Wellenzahl

DeBroglie-Beziehung
 $E = \hbar \omega$
 $p = \hbar k$

\hbar = Planck'sches Wirkungsquantum