E-Dynamik: Feldtheorie

$\to$ Vektoranalysis ist wichtig!

Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r},t)$

speziell: $\underline{A} \to \varphi(\underline{r},t)$ skalares Feld

Gradient: $\nabla \varphi$ Gradient $\to$ Wie ändert sich φ mit $\underline{r}$

$\nwarrow$ Nabla-Operator

Kartes.: $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$

Jetzt: $\underline{A}(\underline{r},t)$ ist wirklich ein Vektor

Divergenz von $\underline{A}$

$\Rightarrow$ Aussage über die sogenannte Quelldichte

Definition (für eine feste Zeit t)

„Fluss" von $\underline{A}$ durch die Fläche $F_{\Delta V}$

$$\operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{F_{\Delta V}} d\underline{F} \cdot \underline{A}(\underline{r}')$$

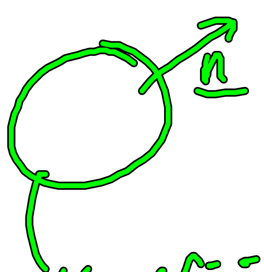
Integral über die geschlossene Oberfläche des kleinen Volumens V

Interpretation:

Die Divergenz ist ein Maß für die durch $F_{\Delta V}$ stoßenden Feldlinien!

$$d\underline{F} = dF\,\underline{n}(\underline{r}')$$

Flächennormalenvektor (ist immer nach außen gerichtet!)



kugelförmiges ΔV

Bemerkungen

- Auswertung in kartesischen Koordinaten (man wählt ΔV als Würfel) ergibt

$$\operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) = \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\underline{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\underline{r})}{\partial z}$$

- Das Ergebnis der Divergenz ist ein Skalar.

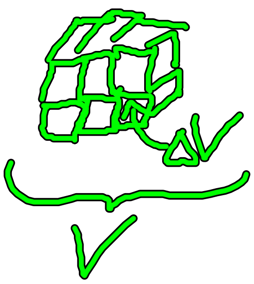
- Beispiel:

gesamte Ladungsdichte am Ort $\underline{r}$ zur Zeit t

$$\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\underline{r},t)$$

(eine der Maxwell-Gleichungen)

- Wende die Integral-Definition von $\mathrm{div}\,\underline{A}$ auf eine Vielzahl miteinander verbundener Würfel bzw. Volumina an!



$$\int dV\, \mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r}) = \oint_{F_V} \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{F}$$

geschlossene Oberfläche über das gesamte Volumen V

Gauß'scher Integralsatz

→ verknüpft Volumenintegral über die Divergenz eines Feldes mit dem Oberflächenintegral über das Feld an sich.

Rotation

Frage: Bilden die Feldlinien von $\underline{A}(\underline{r})$ einen Wirbel?

Antwort: Berechne die lokale Wirbeldichte von $\underline{A}$ am Ort $\underline{r}$

$\Longrightarrow$ Rotation

Definition (Koordinatenunabhängig!)

$$(*) \quad \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{n} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C_{\Delta F}} d\underline{r} \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

Integral über die geschlossene Kurve $C_{\Delta F}$ um die Fläche ΔF

Bemerkungen

- $\operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r})$ ist ein Vektor

$\Longrightarrow \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{n}$ ist die Komponente von $\operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r})$ in Richtung $\underline{n}$

- In Kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

Vektor!

$$= \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

- Beispiel: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahts

konzentrische Kreise

$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) \sim \underline{j}(\underline{r})$$

(vgl. $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

- <u>Stoke'scher Integralsatz</u>

betrachte viele miteinander verbundene Flächenelemente ΔF_i → Gesamtfläche F

$$\int d\underline{F}' \cdot \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}')\right) = \oint_C d\underline{r}' \cdot \underline{A}(\underline{r}')$$

Flächenintegral über die gesamte Fläche

Kurvenintegral über das Feld

- <u>Helmholtz-Theorem</u>

Jedes 2-fach stetig differenzierbare Vektorfeld kann man in einen wirbelfreien Anteil und quellfreien Anteil zerlegen

eindeutig

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_1(\underline{r}) + \underline{A}_2(\underline{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{A}_1(\underline{r}) = 0 \quad , \quad \nabla \times \underline{A}_2(\underline{r}) = 0$$

quellfreie Anteil — wirbelfreie Anteil

II. Elektrostatik

→ Phänomene, die zeitliche konstante Ladungen und zeitlich konstante elektrische Felder involvieren

II.1. Grundlagen

II.1.1. Coulomb'sches Gesetz

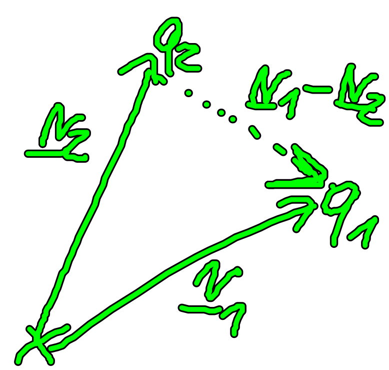
Ausgangspunkt:
Es gibt 2 Sorten von Ladungen, positiv und negativ.
Diese Ladungen üben Kräfte aufeinander aus

Betrachte konkret zwei punktförmige Ladungen q_1, q_2 an den Orten $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$ (die Ladungen ruhen!)

$$\underline{F} = K\, q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

Coulombkraft (1785)

K: Konstante



Bemerkungen

- K ist eine positive Konstante.

  Es gibt für K zwei Wahlmöglichkeiten. Diese bestimmen auch die Einheit der Ladung

- $K = 1$ "Gauß-System" (CGS
  Centimetre Gram Second)

  veraltet, aber immer noch in vielen (guten) Lehrbüchern zu finden!

  Folgerung für die Einheit der Ladung:

$$[q] = \sqrt{\underbrace{[\text{Kraft}]}_{N = \frac{kg\,\overset{\text{Meter}}{m}}{s^2}}}\;\underbrace{[\text{Länge}]}_{m}$$

→ Die Einheit der Ladung ist also nur durch mechanische Größen bestimmt

- $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ε_0: Permittivität (Dielektrizitätskonstante) des Vakuums

$$\varepsilon_0 = 8{,}8543 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Diese Wahl nennt man "SI-System"
(hat sich inzwischen durchgesetzt) Système International d'Unités

Wir benutzen hier in der VL SI

Einheit der Ladung

$$[q] = \sqrt{\underbrace{\frac{As}{Vm}}_{\varepsilon_0} \underbrace{N}_{\text{Kraft}} \underbrace{m}_{\text{Länge}}} = \underbrace{As}_{1V = \frac{Nm}{As}} = \underbrace{1C}_{1\ \text{Coulomb}}$$

- Die Coulombkraft hat die Abstandsabhängigkeit $\frac{1}{r^2}$

r — Abstand der Punktladungen

— wie Gravitationskraft

aber: Coulombkraft ist viel stärker!

Betrachte 2 Elementarladungen (2 Elektronen) im Abstand eines Bohr-Radius $a_B = 0.53$ Å $\sim 10^{-10}$ m

$$F^{Coul} \sim 10^{-8}\ N$$

$$F^{Grav} \sim 10^{-47}\ N$$

Unterschied von 39 Größenordnungen

- Gültigkeit: Die Coulombkraft ist in der angegebenen Form gültig bis hinein in den atomaren Bereich

$$r \gtrsim 10^{-13}\ m$$

Für noch kleinere Abstände gibt es Korrekturen aus der Quantenelektrodynamik:
Grund: Wechselwirkung zw. geladenen Elementarteilchen und den "Austauschteilchen" der elektromagnet. WW, den Photonen

II.1.2. Das elektrostatische Feld

Aus dem Ausdruck für die Coulombkraft $\underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$

läßt sich das Feld $\underline{E}(\underline{r})$ definieren

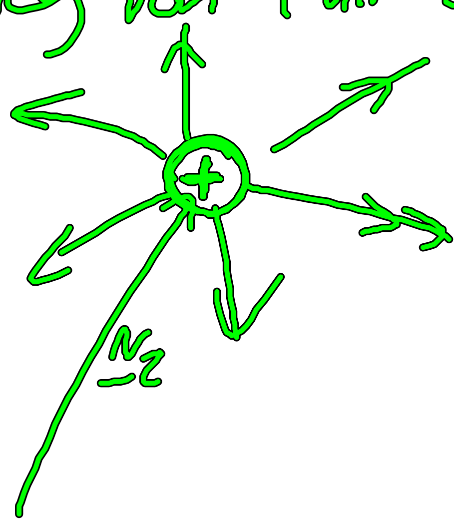
Betrachte das Feld, das durch eine Ladung q_2 am Ort $\underline{r}_2$ an dem Ort $\underline{r}_1$ erzeugt wird

(*) $\underline{F}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \stackrel{!}{=} q_1 \underline{E}(\underline{r}_1)$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

man sieht:

Feldlinien von $\underline{E}(\underline{r}_1)$ weisen radial von $\underline{r}_2$ weg, und sie sind für $q_2 > 0$ ($q_2 < 0$) weg von (hin zu) q_2 gerichtet



Einheit des elektr. Feldes

Feld $\hat{=}$ $\frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$

$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$

Newton

Coulomb

benutze

$1V = \frac{Nm}{As}$

$1C = As$

<u>Verallgemeinerung des Punktladungsmodells</u>

- Betrachte statt einer Punktladung viele Punktladungen q_i, $i = 1, \ldots, N$, am Orten $\underline{r}_i$

Es gilt:

Kräfte auf eine Ladung q bei $\underline{r}$, die durch die q_i hervorgerufen werden, addieren sich auf

$\rightarrow$ Superpositionsprinzip

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3}$$

$$\boxed{\nabla \cdot E(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}}$$

$\underline{r}_i \neq \underline{r} \quad \forall i$

• Betrachte anstatt einzelner ("diskretisierter") Ladungen q_i eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$

$$\rho(\underline{r}) \overbrace{\underbrace{d\underline{r}}_{\text{Volumenelement}}}^{d^3r} = \underbrace{dq}_{\text{Ladung im Volumenelement}}$$

Umschreiben des Ausdrucks für das Feld

$$\sum_{i=1}^{N} q_i \ldots \longrightarrow \underbrace{\int d\underline{r}'}_{\text{Volumenintegral}} \rho(\underline{r}') \ldots$$