Wh: Betrachte System von N Punktladungen $i=1,\dots,N$ an Orten $\underline{r}_i$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\underline{r}-\underline{r}_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3}$$

Übergang zur Ladungsdichte (Volumenladungsdichte)

$$\varrho(\underline{r})\,d^3r = \underbrace{dq}_{\text{Ladung im Volumenelement } d^3r}$$

$\int d^3r\,\varrho(\underline{r})$ Gesamtladung im Raum

$$\int_V d\underline{r}\,\varrho(\underline{r})$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\,\varrho(\underline{r}')\,\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \quad (*)$$

beachte: Das Integrationsvolumen muß die Ladungsdichte vollkommen einschließen

Spezialfall:

Die Ladungsdichte $\rho(\underline{r}')$ ist wieder aus Punktladungen aufgebaut

$$\rho(\underline{r}') = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i) q_i$$

Summe aus Deltafunktion

Setze ein in ⊛

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \int d\underline{r}' \, \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i) \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} q_i$$

benutze $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, \delta(x-a) = f(a)$

für 1D

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3}$$

'alte' Formel

Bemerkung:

Beide Ausdrücke für $\underline{E}(\underline{r})$ zeigen, daß das elektr. Feld durch Ladungen bestimmt ist

bzw. Ladungsdichten

Später in der eigentlichen Elektrodynamik:
$\underline{E}$-Felder können auch ohne "Quellen" (Ladungen) existieren!

II. 1.3. Elektrostatisches Potential

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \underbrace{\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}_{\underline{f}(\underline{r},\underline{r}')}$$

Vektorwertige Funktion

es gilt:

$$\underline{f}(\underline{r},\underline{r}') = -\nabla_{\underline{r}} \underbrace{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{Skalar!}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= -\nabla_{\underline{r}} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$

~~der~~ Da nach $\underline{r}$ differenziert wird, kann der Gradient herausgezogen werden!

Definiere nun:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

elektrostatische Potential

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})}$$

Bemerkungen

- Offensichtlich ist Φ nur bis auf eine Konstante bestimmt!

Spezialfall Punktladung ($N=1$)

$$\rho(\underline{r}') = q_1 \delta(\underline{r}' - \underline{r}_1)$$

$$\Longrightarrow \Phi(\underline{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_1|}$$

wichtig: Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{r}$

(entsprechend $|\underline{E}| \sim \frac{1}{r^2}$)
und damit auch die Kraft

Bezug zwischen Potential und Energie

Betrachte einzelne Ladung q im ~~extern~~ externe Feld $\underline{E}(\underline{r})$

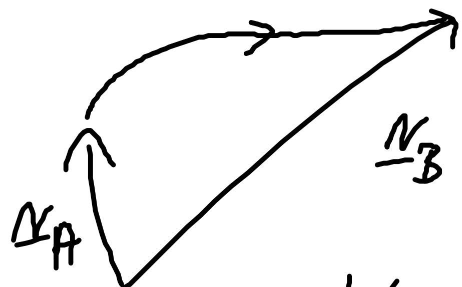
Arbeit, die aufgewendet werden muß, um q von einem Ort $\underline{r}_A$ zu einem anderen Ort $\underline{r}_B$ zu bringen ??

benutze Ausdruck aus der klass. Mechanik

$$\underset{\text{Arbeit}}{W} = - \int_{\underline{r}_A}^{\underline{r}_B} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = - q \int_{\underline{r}_A}^{\underline{r}_B} d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r})$$

Wegelement

$\underline{F} = q\underline{E}$



benutze $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\phi(\underline{r})$

$$W = - q \int_{\underline{r}_A}^{\underline{r}_B} d\underline{r} \cdot \left(-\nabla_{\underline{r}}\phi(\underline{r})\right) = q\left(\phi(\underline{r}_B) - \phi(\underline{r}_A)\right)$$

$*$

gängige Interpretation

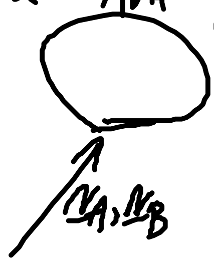
Arbeit W entspricht einer Differenz potentieller Energien

$\Rightarrow q\phi(\underline{r})$ ist die potentielle Energie einer Ladung im externen Feld $\underline{E}(\underline{r})$!

außerdem:

(*) zeigt, dass die Arbeit W unabhängig vom Weg ist

— es kommt nur auf die Differenz der potentielle Energie zwischen End- und Anfangspunkt an!



$W = 0$!

$$\Longrightarrow \oint \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = 0 \quad !!$$

geschlossenes Kurvenintegral

gleichbedeutend:

$$\text{rot } \underline{E}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \times \nabla_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) = 0$$

In der Elektrostatik ist das elektrische Feld immer "wirbelfrei"

$\Longleftrightarrow$ es gibt keine geschlossenen $\underline{E}$-Feld-Linien!

Bemerkung: Im dynamischen Fall ist dies anders, hier ist ~~kann~~ $\underline{\nabla} \times \underline{E}$ von Null verschieden ~~...~~ infolge eines zeitl. veränderlichen magnetischen Feldes

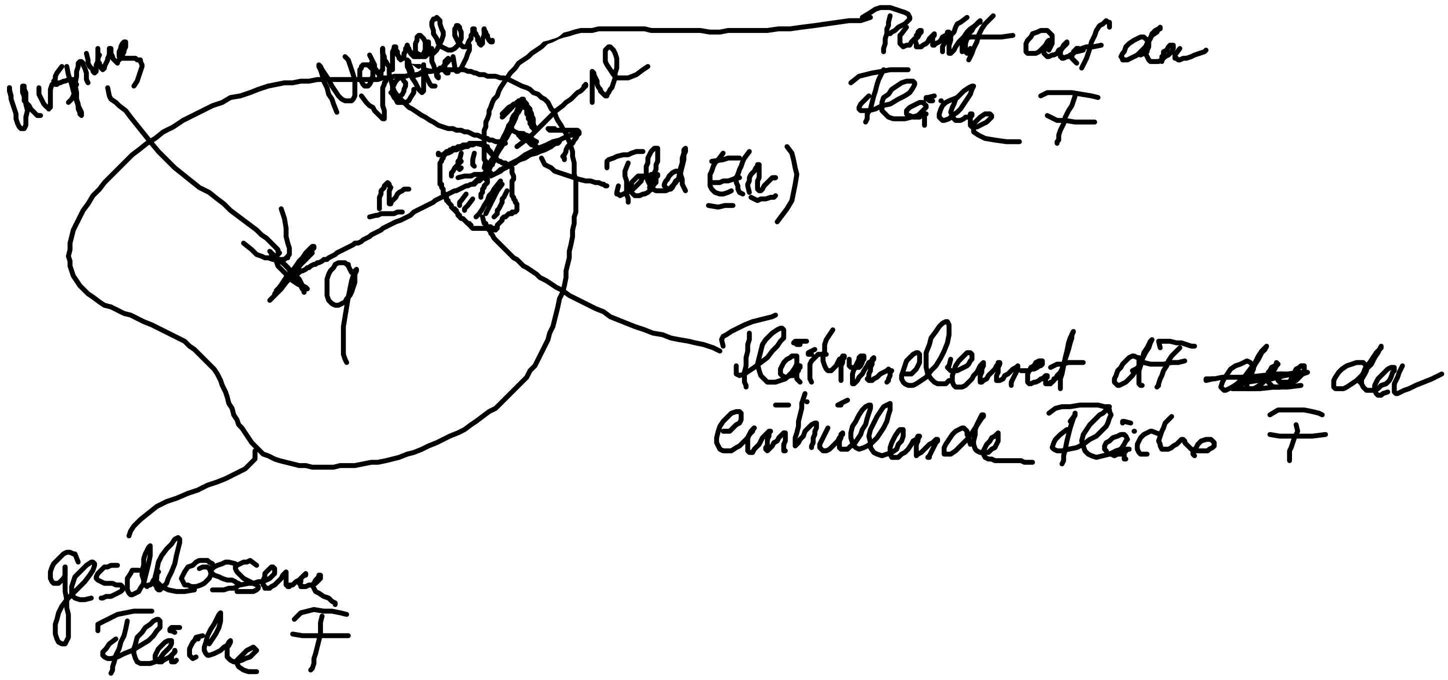
II. 1.4. Gauß'sches Gesetz

Motivation:

Die Integralformel $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$ ist manchmal umständlich, um das Feld zu berechnen!

Alternative: Gauß'sches Gesetz

Betrachte Punktladung q, umhüllt von einer geschlossenen Fläche F. Annahme: q liegt im Ursprung



Der sogenannte Fluß des Feldes durch das Flächenelement dF bei $\underline{r}$ ist definiert als

$$\underline{E}(\underline{r})\cdot d\underline{F} = \underline{E}(\underline{r})\cdot\underline{n}\, dF$$
$$= |\underline{E}(\underline{r})|\,\underbrace{|\underline{n}|}_{1}\cos\vartheta\, dF$$

$$|\underline{E}(\underline{r})| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\underline{E}(\underline{r})\cdot d\underline{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\cos\vartheta\, dF$$

$$\cos\vartheta = \frac{dF'}{dF}$$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dF'$$

← Flächenelement einer Kugel um den Ursprung mit Radius r

für Kugel: $dF' = r^2 d\Omega$

mit $d\Omega = d\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Integriere über die gesamte Fläche

$$\underbrace{\int_F \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}}_{\text{Gesamtfluß durch } F} = \int_{F_{Kugel}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi$$

$= q/\varepsilon_0$

Man sieht auch:

Der Gesamtfluß ist unabhängig von der Form des Volumens und der Größe der Kugel!

Folge der $1/r^2$-Abhängigkeit des Feldes!

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Ladungsverteilungen:

$$\boxed{\underbrace{\int_F \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}}_{\text{Gesamtfluß}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int d^3r\, \rho(\underline{r})}_{\text{eingeschlossene Gesamtladung}}}$$

Gauß'sche Gesetz

Differentielle Form

$\int$

$$\int_F \underline{E}\cdot d\underline{F} = \int_V \nabla\cdot\underline{E}\, d^3r$$

Gauß'scher Integralsatz

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\underline{r})\, d^3r$$

Gauß'sches Gesetz

Vergleich:

$$\boxed{\nabla\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}} \quad (*)$$

- Differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

mathemat.:
lineare Diff.gl. 1. Ordnung

Konsistent mit der Tatsache, dass sich die elektr. Felder verschiedener Punktladungen überlagern!

- Die Gleichung ⊛ entspricht ~~gena~~ gerade einer der vier Maxwell'schen Gleichungen, sie gilt auch im dynamischen Fall!

aber: ~~ro~~ rot $\underline{E}$ gilt nur in der Statik

II.1.5. Poisson-Gleichung

Kombiniere $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$

mit $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\phi(\underline{r})$

$(\Leftrightarrow \text{rot}\,\underline{E} = 0)$

$$\rightarrow \nabla_{\underline{r}} \cdot \left(-\nabla_{\underline{r}}\phi(\underline{r})\right) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta \Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}}$$ Poisson-Gleichung

mit Δ Laplace-Operator

2-fache räumliche Ableitung

speziell in kartesischen Koordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$