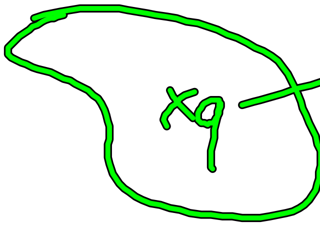
Wh.: 2 Grundgl. der Elektrostatik

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 \quad ① \\ \nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \dfrac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0} \quad ② \end{cases}$$

① (in der Elektrostatik)

② Gauss'sche Gesetz



Enthaltsladung

$$\oint_F d\underline{F} \cdot \underline{E} = q/\varepsilon_0$$

Fluss durch die Fläche

gilt auch für komplizierte Ladungsverteilung in V, da die Größe von V irrelevant und da $|\underline{E}| \sim \frac{1}{r^2}$ abfällt.

benutze: $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \Phi(\underline{r})$ wg. ①, Einsetzen in ②

$\Rightarrow$ Poissongleichung

$$\Delta \Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Laplace

lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Bemerkungen:

- Speziell für $\rho(\underline{r})=0$ (keine Ladungen) geht die Poisson-Gleichung über in die sogenannte Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(\underline{r})=0$

- Implikation der Poissongleichung
nach unserer früheren Def. von $\Phi(\underline{r})$ gilt

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (*)$$

(das ist die allgemeine Lösung der Poissongleichung in Abwesenheit sogenannter Randbedingungen)

Kombiniere:

Poisson: $\Delta_{\underline{r}}\Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

$$(*) \rightarrow \stackrel{!}{=} \Delta_{\underline{r}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\Delta_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Es muss also gelten

$$\boxed{\Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{!}{=} -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Strategie, um das zu begründen?

Fallunterscheidung:

- $\underline{r} \neq \underline{r}' \Rightarrow \underbrace{\Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\nabla_{\underline{r}} \cdot \left(-\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\right)} = 0$
- $\underline{r} \to \underline{r}'$

Singularität!

Strategie: Integriere die Funktion

$\Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ über

~~Kugel~~ Kugelvolumen

$$\int d^3r\, \underbrace{\Delta_{\underline{r}}}_{(\nabla\cdot\nabla_{\underline{r}})} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underset{\text{Gauß'scher Satz}}{=} \int d\underline{F}_{\underline{r}}\, \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Flächenintegral

lege $\underline{r}'$ in den Ursprung!

$$\underbrace{4\pi}_{\text{aus der Winkelintegration}} \cancel{\int} \cancel{r^2\left(-\frac{1}{r^2}\right)} = -4\pi$$

II.2. Feldverhalten an Grenzflächen

Bisher kennengelernt:

Volumen-Ladungsdichte

$$\rho(\underline{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\overbrace{q(\underline{r})}^{\text{Ladung}}}{\underbrace{\Delta V}_{\text{Volumenelement um } \underline{r}}}$$

$$\overbrace{q(\underline{r})}^{\text{Ladung}} = \int_{\Delta V(\underline{r})} d^3r'\, \rho(\underline{r}')$$

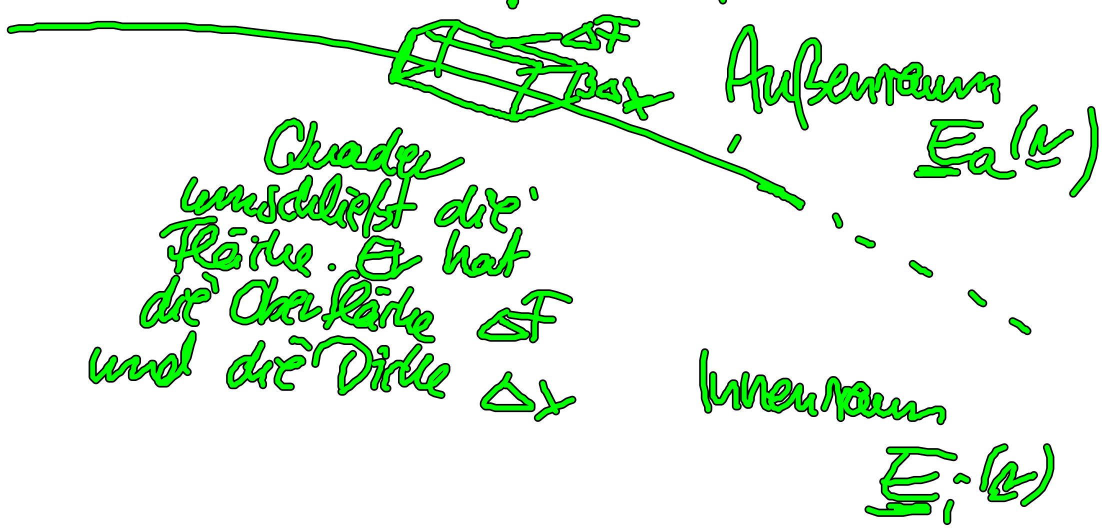
Betrachte jetzt Flächen mit (Ober-)Flächenladungsdichte

$$\sigma(\underline{r}) = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{q(\underline{r})}{\Delta F}$$

Ladung $q(\underline{r}) = \int_{\Delta F(\underline{r})} dF\, \sigma(\underline{r}')$

Frage:
Wie verhält sich das elektrische Feld beim Durchgang durch eine Fläche mit $\sigma \neq 0$. Die gesamte Ladung sei auf der Fläche homogen verschmiert. Es gibt also keine freien zusätzlichen Ladungen im Außen- oder Innenraum

z.B. Kugeloberfläche



Quader umschließt die Fläche. Er hat die Oberfläche ΔF und die Dicke Δx

Betrachte getrennt die Normal- und Tangentialkomponente des Feldes $\underline{E}(\underline{r})$ bezüglich der Grenzfläche

i) <u>Normalkomponente</u> (mit $\underline{n}$ Flächennormalenvektor)

Berechne: $\int_{F_{Quader}} dF\, \underline{n}\cdot \underline{E}(\underline{r}) \;\hat{=}\;$ Summe aus 6 Beiträgen

$$= \Delta F \left(\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} - \underline{E}_i(\underline{r})\underline{n} \right)$$

$\Delta x \to 0$ vernachlässige die Dicke des Quaders ①

andererseits

$$\int_{F_{Quader}} dF\, \underline{n}\cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_{V_{Quader}} dV\; \nabla\cdot \underline{E}(\underline{r})$$

Gauss'scher Integralsatz

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_{Quader}} dV\, \rho(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{F_{Quader}} dF\, \sigma(\underline{r})$$

Quader ist klein

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\Delta F\, \sigma(\underline{r}) \quad ②$$

Kombiniere ① und ②

$$\boxed{\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} - \underline{E}_i(\underline{r})\cdot\underline{n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}}$$

Beim Durchgang durch eine Fläche mit $\sigma \neq 0$ macht die Normalkomponente des elektrischen Feldes einen Sprung!

ii) Tangentialkomponente

Wir wissen

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = 0$$ gilt immer!

geschlossene Kurve

$\Rightarrow$ betrachte Kontur eine Kurve, die die Grenzfläche einbezieht

$$\oint d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \underset{\Delta x \to 0}{=} \underline{E}_a(\underline{r}) \cdot d\underline{r} - \underline{E}_i(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ Tangentialkomponente des elektrischen Feldes bleibt stetig

Folgerungen aus i) und ii) speziell für das Feld in der Nähe von <u>Leiteroberflächen</u>

Was ist ein Leiter?

Material mit frei beweglichen Ladungsträgern

Beispiele:

- Metalle: bewegliche Ladungsträger sind Elektronen

- Elektrolyte:
  Flüssigkeiten mit frei beweglichen Ionen

betrachte hier metallische Festkörper $\rightarrow$ fest definierte Oberfläche

Bringe den Leiter in ein elektrostatisches Feld ein.
$\leftarrow \underline{E}^0$

<u>Annahme</u> (plausibel ... !)

Ladungen im Leiter bewegen sich infolge der auf sie wirkenden Kraft $\underline{F} = q\underline{E}^0$

Nach einiger Zeit (Relaxationszeit) stellt sich ein <u>Gleichgewichtszustand</u> ein, in dem sich alle frei beweglichen Ladungen <u>in Ruhe</u> befinden!

Jetzt können also keine Kräfte mehr wirken

Das impliziert:

$$\underline{E}_i(\underline{r}) = 0$$

Das Innere des Leiters ist feldfrei!

$$\Leftrightarrow \Phi_i(\underline{r}) = \text{const}!$$

Was passiert an der Grenzfläche
Leiter $\Leftrightarrow$ Außenraum ?

Leiter

$\underline{E}_i(\underline{r}) = 0$

Vakuum

Feld $\underline{E}_a(\underline{r})$

Wir wissen: $\underline{E}_a(\underline{r})\big|_{\text{tangential}} = \underline{E}_i(\underline{r})\big|_{\text{tangential}}$

Normal-komponente: $\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} - \underline{E}_i(\underline{r})\cdot\underline{n} = \dfrac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

Benutze nun $\underline{E}_i(\underline{r}) = 0$ (und zwar alle Komponenten!)

$\Rightarrow \underline{E}_a(\underline{r})\big|_{\text{tangential}} = 0$

$$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Das elektrostatische Feld $\underline{E}_a(\underline{r})$ steht senkrecht auf der Leiteroberfläche!

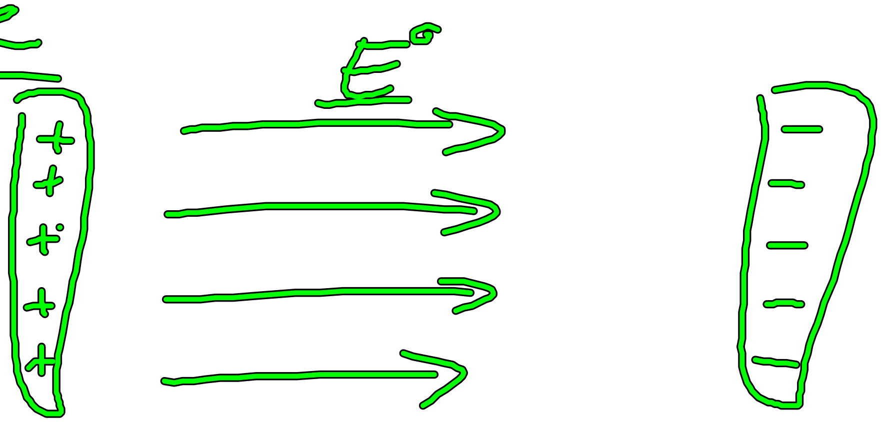
Außerdem sieht man:

Es muß sich durch das Einbringen des Leiters in das Feld $\underline{E}^0$ eine Flächenladungsdichte $\sigma(\underline{r})$ gebildet werden

$\longrightarrow$ Influenzladungsdichte

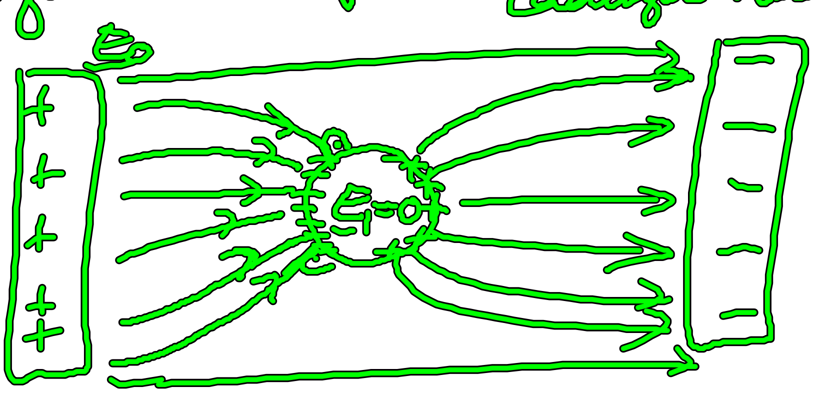
Skizze

Situation ohne leitende Kugel



Einbringen der Kugel:

Im Innern werden die bewegl. Ladungen verschoben so lange, bis sich Gleichgewicht einstellt



Totales Feld außen:

Überlagerung des Feldes $\underline{E}_0$ und des Feldes aus den influenzierten Oberflächenladungen!
(Dipolfeld)

<u>Totales Feld innen</u>

~~Ladungen~~

$\underline{E}_i$ ist ebenfalls eine Überlagerung, nämlich die des Feldes $\underline{E}_0$ mit dem "Gegenfeld" aus den verschobenen Ladungen!

ist entgegengesetzt zu $\underline{E}_0$ gerichtet!

→ Im Inneren werden diese Feld <u>kompensiert</u> → $\underline{E}_i(r) = 0$