Wh.: Verhalten von $\underline{E}(\underline{r})$ an Grenzflächen

i) Normalkomponente

$$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} - \underline{E}_i(\underline{r})\cdot\underline{n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$ — Flächenladungsdichte

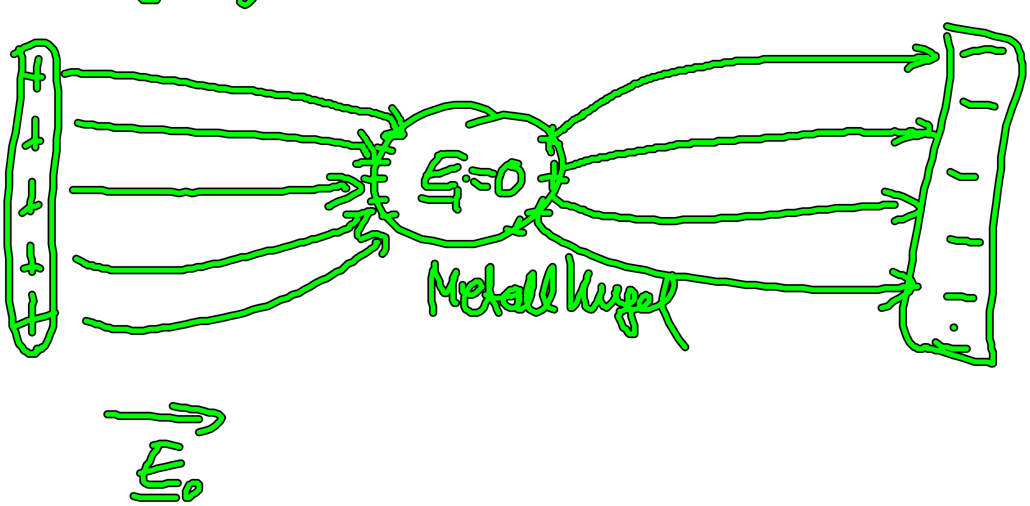
Sprung!

ii) Tangentialkomponente

$$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot d\underline{r} - \underline{E}_i(\underline{r})\cdot d\underline{r} = 0$$

Stetigkeit!

Folgerungen für Leiter



Im Innern der Kugel kompensieren sich äußeres Feld $\underline{E}_0$ und das innere Feld, das aus der Verschiebung der freien Ladungen herrührt

$$\Rightarrow \quad \underline{E}_{\text{innen}} = 0 \quad !$$

→ Tangentialkomponente von $\underline{E}_a = 0$ ⇒ elektrisches Feld außen ~~steht~~ steht senkrecht!

außerdem: $$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

$\sigma(\underline{r})$ entspricht der "influenzierten" Flächenladungsdichte!

II.3. Randwertprobleme in der Elektrostatik

Grundproblem:

Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$$

| Differentialgleichung 2. Ordnung

Die Lösung für $\Phi(\underline{r})$ wird erst eindeutig durch die Vorgabe von Randbedingungen

Bisher hatten wir als Lösung kennengelernt (Kap. II.1.3)

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (*)$$

Diese Lösung stimmt dann, falls es keine "Ränder" (Grenzflächen) in V gibt und falls $\rho(\underline{r})$ im ganzen Raum bekannt ist!

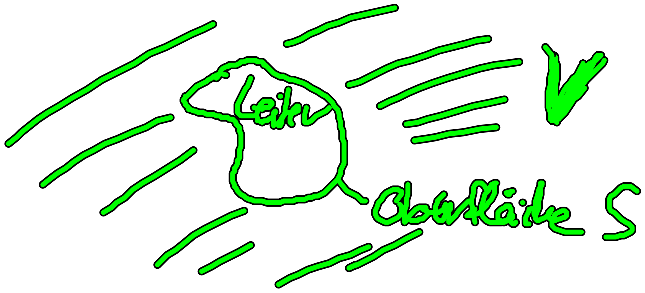
Ziel nun: Ausdruck für $\Phi(\underline{r})$, falls es Randbedingungen gibt

Motivation:

- In der Praxis hat man es meist mit endlichen Volumina zu tun
  → Ränder müssen berücksichtigt werden
- Außerdem ist häufig $\rho(\underline{r})$ nicht überall bekannt

Beispiel:

Im Raum befindet sich ein Leiter



Wir wissen:
im Leiter ist $\underline{E}(\underline{r}) = 0$
$\Longleftrightarrow \Phi(\underline{r}) = \text{const}$ im Leiter

Damit folgt auch:

$$\Phi(\underline{r}) = \Phi_S = \text{const auf der}$$
Leiteroberfläche

mathematisch: Dirichlet'sches Randwertproblem!

allg: Dirichlet'sche Randbedingung:

$$\Phi(\underline{r})\Big|_S = \Phi_S \quad \text{gegeben}$$

man kann zeigen:
Das Dirichlet'sche Problem hat (bis auf eine Konstante) eine eindeutige Lösung für $\Phi(\underline{r})$ in V!

Weitere mögliche Randbedingungen

- von Neumann Randbedingung

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S \quad \text{gegeben}$$

die Ableitung des Potentials in Richtung des Normalenvektors

($\hat{=}$ Normalkomponente des Gradienten)

<u>Beispiel:</u>

Flächenladungsdichte auf Leiteroberfläche $\sigma(\underline{r})$, als bekannt vorausgesetzt

man weiß: $$\frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0} = \underline{E}_a(\underline{r}) \cdot \underline{n} \quad \left(\begin{matrix}\text{für}\\ \text{Leiter}\end{matrix}\right)$$

Flächen-ladungsdichte auf S!

$$= - \left.\frac{\partial \Phi(\underline{r})}{\partial n}\right|_S \quad \text{gegeben!}$$

- Mischung aus Dirichlet / von Neumann
  (wenn man mehrere Grenzfläche ~~...~~ in V hat)

Frage: Formale Lösung für $\Phi(\underline{r})$ in Anwesenheit solcher Randbedingungen?

Definiere dazu die sogenannte

<u>Green'sche Funktion</u>

Die Definition geschieht über die Differentialgleichung

$$\Delta_{\underline{r}}\, G(\underline{r}, \underline{r}') = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0}$$

Vergl. mit $\Delta\Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$.

man sieht:
Die Green'sche Funktion ist Lösung der Poissongleichung für eine Punktladung, die bei $\underline{r}=\underline{r}'$ lokalisiert ist!!

Erinnerung

$$\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$$

System von N Punktladungen

hier: $N=1$, $q_1=1$

Wir haben bereits gesehen:

$$\Delta_{\underline{r}} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ Das Potential der Punktladung entspricht also gerade einer Green'sche Funktion

Allgemeiner kann man die Green'sche Funktion wie folgt schreiben

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \overbrace{f(\underline{r},\underline{r}')}^{\text{skalare Funktion}}$$

mit $\Delta_{\underline{r}} f(\underline{r},\underline{r}') = 0$

Physikalische Interpretation:

$f(\underline{r}, \underline{r}')$ ist ein Zusatzpotential, welches der Laplace-Gleichung genügt!

Die Funktion $f(\underline{r}, \underline{r}')$ kann so angepasst werden, dass bestimmte Randbedingungen erfüllt werden!

Nun:
Benutze die Green'sche Funktion zur Aufstellung einer Gleichung für $\phi(\underline{r})$ in einem Volumen V mit Rändern

Ausgangspunkt: Green'sche Satz für 2 skalare Felder $\varphi_1(\underline{r}), \varphi_2(\underline{r})$

$$\int_V d^3r \left(\varphi_1(\underline{r}) \Delta_{\underline{r}} \varphi_2(\underline{r}) - \varphi_2(\underline{r}) \Delta_{\underline{r}} \varphi_1(\underline{r}) \right) \quad (*)$$

$$= \int_{F_V} d\underline{F} \left(\varphi_1(\underline{r}) \nabla_{\underline{r}} \varphi_2(\underline{r}) - \varphi_2(\underline{r}) \nabla_{\underline{r}} \varphi_1(\underline{r}) \right)$$

Setze nun

$\varphi_1(\underline{r}) = \Phi(\underline{r})$ gesuchtes elektrostatisches Potential

$\varphi_2(\underline{r}) = G(\underline{r}, \underline{r}')$ Green'sche Funktion

$F_V \to S$ eine ~~Gr~~ Grenzfläche mit Randbedingungen

bemerke noch, dass:

$$\Delta_{\underline{r}} \varphi_2(\underline{r}) = \Delta_{\underline{r}} G(\underline{r}, \underline{r}') = -\frac{\delta(\underline{r} - \underline{r}')}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta_{\underline{r}} \varphi_1(\underline{r}) = \Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Einsetzen

$$\int_V d^3r\, \Phi(\underline{r}) \left(-\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0}\right) - \int_V d^3r\, G(\underline{r},\underline{r}') \left(-\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}\right)$$

$$= \int_S dF \left(\Phi(\underline{r}) \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n} - G(\underline{r},\underline{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$$

Normalkomponenten der entsprechenden Gradienten

$$\Leftrightarrow -\frac{\Phi(\underline{r}')}{\varepsilon_0} + \int_V d^3r\, G(\underline{r},\underline{r}') \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0} = \int_S dF \ldots\ldots$$

Wechsel der Variablen $\underline{r} \to \underline{r}'$

$\underline{r}' \to \underline{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, G(\underline{r},\underline{r}') - \varepsilon_0 \int_S dF \left(\Phi(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} - G(\underline{r},\underline{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right)}$$

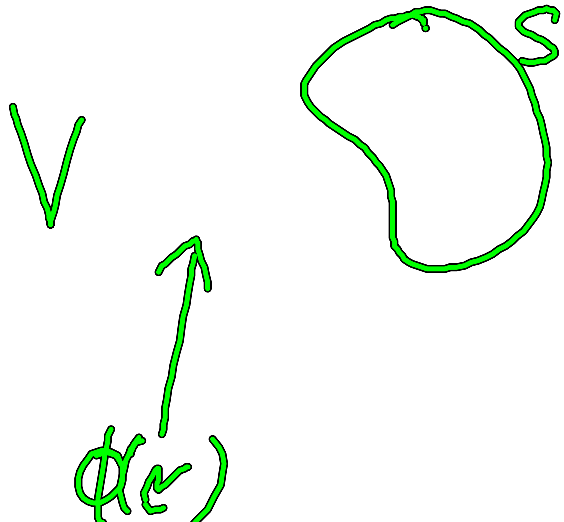
Bemerkungen:

- Die Gleichung gibt $\Phi(\underline{r})$ im interessierenden Volumen V an.

Offensichtlich ist $\Phi(r)$ bestimmt durch

- $\rho(\underline{r}')$ in V
- $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ auf dem "Rand" S
- Green'sche Funktion

Ladungen, die sich außerhalb von V befinden, gehen nur über das Oberflächenintegral ein!



- Spezialfall: V ist der gesamte Raum

$\Leftrightarrow$ S ist eine Oberfläche "im Unendlichen"

man weiß: $\Phi \sim \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für $|\underline{r}-\underline{r}'| \to \infty$

$$G \sim \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad " \quad " \quad \to \infty$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = (\nabla_{\underline{r}} \Phi)\cdot \underline{n} \sim \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \text{ für } |\underline{r}-\underline{r}'| \to \infty$$

Der Integrand ~~fällt~~ verschwindet mit dem Abstand wie $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$!!

beachte
$dS = r^2 d\Omega$ skaliert wie Abstand^2
Flächenelement

$\Rightarrow$ Oberflächenintegral verschwindet!

$\Longrightarrow$ altes Resultat für $\Phi(\underline{r})$ ohne Oberflächenintegral!

~~Spez.~~ System mit Grenzfläche S

Betrachte die beiden relevanten Randbedingungen

- Dirichlet'sche Randbedingung:

Φ ist auf S bekannt

$$\Phi(\underline{r}')\Big|_{\underline{r}' \in S} = \Phi_S$$

<u>Strategie</u>:

Wähle $G(\underline{r}, \underline{r}')$ derart, dass

$$\oint_S df' \, G(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} = 0$$

das wird meist realisiert durch die

Forderung $G(\underline{r},\underline{r}') \overset{!}{=} 0$ für $\underline{r}' \in S$!!

(Bemerkung: Dabei nutzt man aus, daß man bei $G(\underline{r},\underline{r}')$ eine Freiheit bzgl. des Zusatzpotentials hat

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + f(\underline{r},\underline{r}')$$
$$(\Delta_{\underline{r}} f = 0)$$

es bleibt:

$$\Phi(\underline{r}) = \int_V d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, G(\underline{r},\underline{r}')$$
$$- \varepsilon_0 \int_S dF \left(\underbrace{\Phi(\underline{r}')}_{\text{bekannt auf } S} \frac{\partial G}{\partial n'} \right)$$

- <u>Von-Neumann-Randbedingung</u>

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial \Phi(\underline{r}')}{\partial n}$ auf S bekannt!

naheliegende Idee:

Wähle $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ so, dass $\int_S df \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) = 0$!

Diese Idee führt aber zu einem Widerspruch!