Wh:

$$\Phi(\underline{r}) = \int_V d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, G(\underline{r},\underline{r}')$$

Greensche Funktion

$$\circledast \qquad -\varepsilon_0 \int_S dF' \left(\Phi(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} - G(\underline{r},\underline{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right)$$

Eine Grenzfläche!

Gradient von $G(\underline{r},\underline{r}')$ in Richtung des Flächennormalenvektors

mit: $\Delta_{\underline{r}} G(\underline{r},\underline{r}') = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|} + f(\underline{r},\underline{r}') \quad \text{mit } \Delta_{\underline{r}} f = 0 \text{ in } V!!$$

Dirichlet:

Annahme, daß $\Phi(\underline{r}')$ auf S bekannt!

Wähle G so, dass $\int_S dF' \, G \frac{\partial \Phi}{\partial n'} = 0$

realisiert durch $G(\underline{r},\underline{r}') \stackrel{!}{=} 0$ auf S!!

von Neumann

Annahme, daß $\frac{\partial \Phi(\underline{r}')}{\partial n'}$ auf S bekannt!

naheliegende Idee: Wähle G so dass $\int_S dF' \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) = 0$

d.h. $\frac{\partial G}{\partial n'} = 0$!

Das geht so nicht!

Grund: Es gilt immer

$$\int_V d^3r' \, \Delta_{\underline{r}'} G(\underline{r}, \underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \, \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

benutze die Definitionsgleichung für G

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \quad \text{falls } \underline{r} \text{ in } V \qquad (1)$$

Umschreiben der ~~dritten~~ linken Seite

Flächen-Normalenvektor

$$\int_V d^3r' \, \underbrace{\nabla_{\underline{r}'} \cdot \nabla_{\underline{r}'}}_{\text{div grad}} G(\underline{r}, \underline{r}') \underset{\text{Gauß'scher Satz}}{=} \int d\underline{F}' \cdot \nabla_{\underline{r}'} G(\underline{r}, \underline{r}') = \int dF' \, \nabla G \cdot \underline{n}'$$

$$= \int dF' \frac{\partial G}{\partial n'} \qquad (2)$$

Kombiniere:

① = ②

$$\Rightarrow \int_S dF' \, \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \neq 0 \, !$$

Man kann die Normalableitung von G nicht gleich Null setzen!

Wähle stattdessen: $$\frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \underbrace{S}_{\text{Flächeninhalt}}}$$

$$\int_S dF' \, \Phi(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \int_S dF' \, \Phi(\underline{r}')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\frac{1}{S} \int dF' \, \Phi(\underline{r}')}_{\text{Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche}}$$

$$= -\frac{\varphi_0}{\varepsilon_0} \quad \text{mit } \varphi_0 \text{ Mittelwert}$$

Einsetzen in die Bestimmungsgleichung für $\Phi(\underline{r})$

$$\boxed{\Phi(\underline{r}) = \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, G(\underline{r}, \underline{r}') - \varepsilon_0 \int_S dF' \, G(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial \Phi(\underline{r}')}{\partial n'} + \varphi_0}$$

von-Neumann Randbedingung

<u>Zur eigentlichen Konstruktion der Green'schen Funktion</u>

Ausgangspunkt $G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}'|} + f(\underline{r}, \underline{r}')$

mit $\Delta_{\underline{r}} f(\underline{r}, \underline{r}') = 0$ für $\underline{r}$ in V

Interpretation

f ist das Potential von Ladungen außerhalb des interessierenden Volumens V!

Diese (fiktiven!) Ladungen
nennt man Bildladungen oder Spiegelladungen

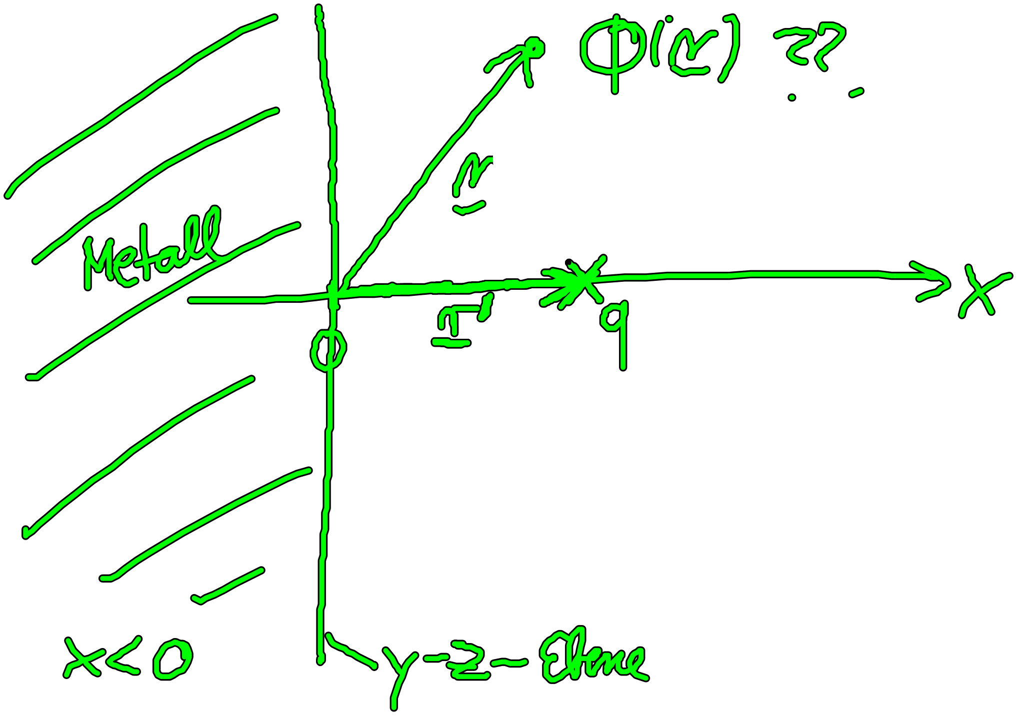
Idee für Dirichlet-Randbedingungen

Bringe Bildladung so an, daß
$G(\underline{r}, \underline{r}') = 0$ für $\underline{r}$ auf S !

$\Longrightarrow$ Bildladungsmethode

Das eigentliche Problem "echte Ladungen + Ränder"
$g(\underline{r}')$
wird abgebildet auf das Problem
"echte Ladung + Bildladung, keine Ränder"

Standardbeispiel: Punktladung vor einer leitenden Wand



Halbraum $x>0$: interessierendes Volumen V

$\underline{r}' = (x', 0, 0)$

Wir wissen:

Für $x<0$ gilt $\underline{E}=0 \Leftrightarrow \Phi = \text{const}$

Setze hier $\Phi(\underline{r}) = 0$ im linken Halbraum und speziell auch auf der Oberfläche

$$\Rightarrow \Phi_S = 0$$ „geerdete Platte"

Dirichlet-Problem!

Frage: Was ist $\Phi(\underline{r})$, $\underline{E}(\underline{r})$ für $\underline{r}$ in V?
($x>0$)

beachte: Feld muß senkrecht auf S stehen!

hier Null wg. $\Phi_S = 0$

$$\Phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, G(\underline{r},\underline{r}')\,\rho(\underline{r}') - \varepsilon_0 \cancel{\oint_S \Phi_S \, df' \frac{\partial G}{\partial n'}}$$

dabei wurde vorausgesetzt, dass $G=0$ auf S!

und

$$\rho(\underline{r}) = q\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$\underline{r}' = (x', 0, 0)$$

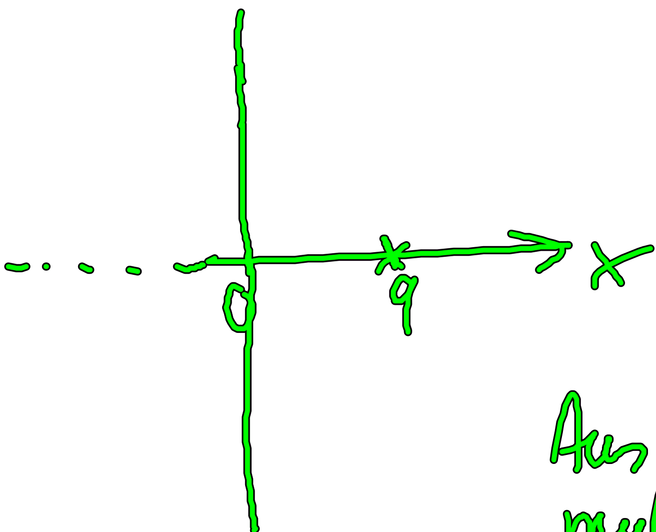
<u>Ansatz</u>

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{q_B/q}{4\pi\varepsilon_0|\underline{r}-\underline{r}_B|}$$

Potential einer Punktladung bei $\underline{r}_B$ (im Halbraum $x<0$) mit Ladung q_B

Hintergrund:

Feld auf S muß senkrecht stehen ⇒ – das kriegt man hin durch Überlagerung zweier Punktladungsfelder!



Aus Symmetriegründen muß gelten

$$\underline{r}_B = (x_B, 0, 0)$$

mit $x_B < 0$

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_B/q}{\sqrt{(x-x_B)^2 + y^2 + z^2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Fordere $G(\underline{r}, \underline{r}') = 0$ auf S

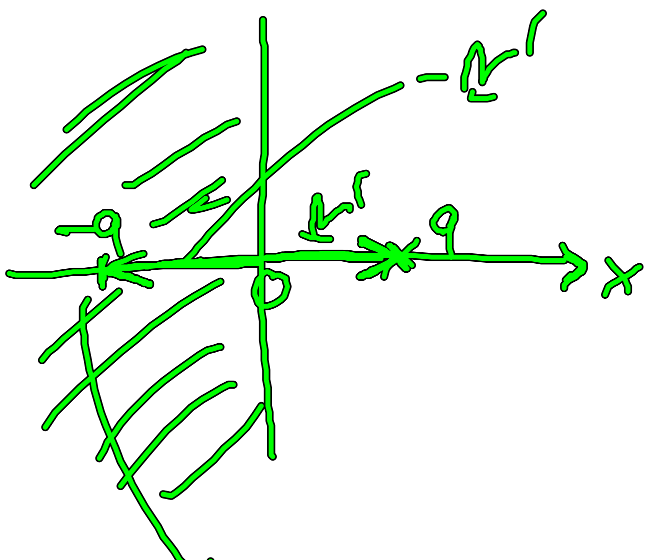
$\uparrow \forall \underline{r} = (0, y, z)$

y-z-Ebene

$$\Leftrightarrow 0 \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{(-x')^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_B/q}{\sqrt{(-x_B)^2 + y^2 + z^2}}$$

erfüllbar durch: $q_B = -q$, $x_B = -x'$

Die Spiegelladung hat also entgegengesetztes Vorzeichen und denselben Abstand zur Grenze.



fiktive Spiegelladung

Prüfe, ob $f(\underline{r}, \underline{r}')$ die Laplace-Gleichung in V erfüllt:

$$\Delta_{\underline{r}} f(\underline{r}, \underline{r}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}+\underline{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi \delta(\underline{r}+\underline{r}')$$

beachte:

$$\delta(\underline{r}+\underline{r}')$$
$$= \delta(\underline{r}-(-\underline{r}'))$$
$$= 0 \quad \text{für } \underline{r} \text{ in } V$$

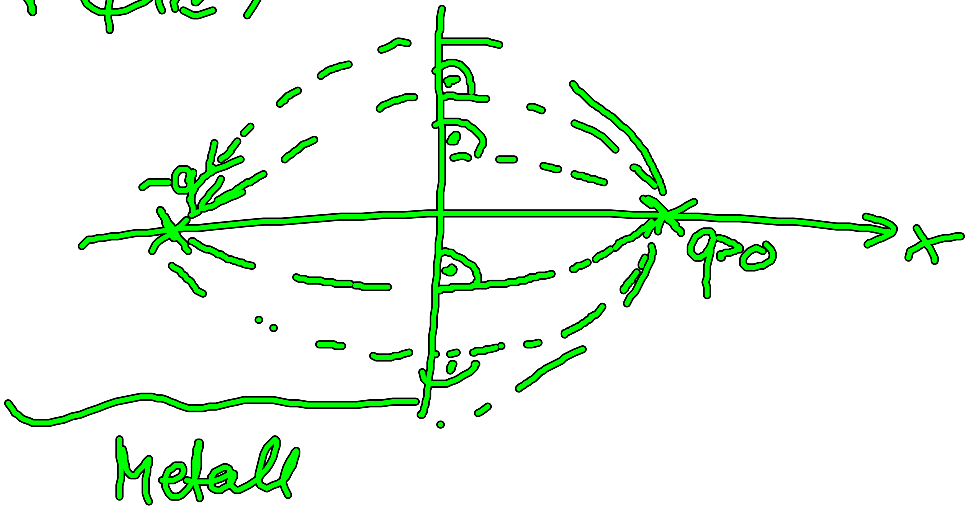
denn $-\underline{r}'$ liegt im Halbraum $x<0$!

Potential

$$\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'' \, G(\underline{r}, \underline{r}'') \underbrace{\rho(\underline{r}'')}_{q\delta(\underline{r}''-\underline{r}')}$$
$$= q \, G(\underline{r}, \underline{r}')$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}+\underline{r}'|}\right)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\Phi(\underline{r})$$



<u>Frage schließlich</u>
Was ist die influenzierte Ladung auf S (Influenzladung)

wir wissen

$$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} - \underbrace{\underline{E}_i(\underline{r})\cdot\underline{n}}_{} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Feld im interessierenden Volumen V ✓

Null, da $\underline{E}_i = 0$ in Leiter!

$$\Rightarrow \underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

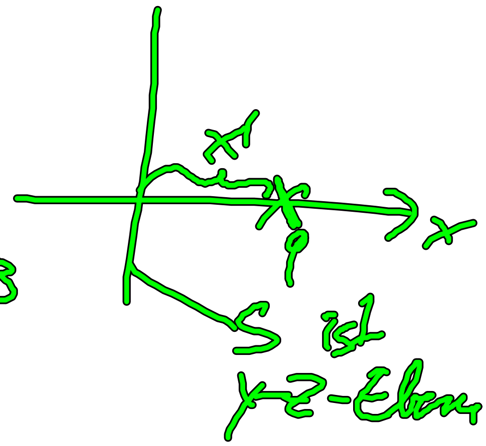
Konkret

$$\frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0} = \left(-\nabla_{\underline{r}}\Phi(\underline{r})\right)\cdot\underline{e}_x\Big|_{\text{ausgewertet auf } S}$$

Ergebnis:

$$\frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(y,z)}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(-x')}{\left(\sqrt{x'^2+y^2+z^2}\right)^3}$$



Totale influenzierte Ladung

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \; \sigma(y,z)$$

Auswertung in Polarkoordinaten

$$y, z \to R, \varphi$$

$$R = \sqrt{y^2+z^2}$$

$$Q = -\frac{q x'}{2\pi} \int_0^{\infty} dR \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{R}{\left(\sqrt{x'^2+R^2}\right)^3}$$

$$= \dots = -q \;!$$

Die totale influenzierte Ladung auf S kompensiert gerade die echte Ladung q !

Nachbemerkung zu Randwertproblemen

Häufig benutzt man zur Lösung ~~??~~ der Poissongleichung mit Randbed. nicht Bildladungen, sondern best. orthogonale Funktionen

z.B.
- Fourierreihen
- Legendrepolynome
- Kugelflächenfunktionen

II. 4. Die elektrostatische Feldenergie

Wir wissen aus Kap. II. 1.3:

Die potentielle Energie einer Ladung q im elektrostat. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ ist gegeben durch

$$W(\underline{r}) = q\,\Phi(\underline{r})$$

alternative Interpretation:

$W(\underline{r})$ ist die Arbeit, die man aufbringen muß, um q aus dem Unendlichen (wo $\Phi = 0$) zum Ort $\underline{r}$ zu bringen

Betrachte System aus Punktladungen

$q_i \,, \quad i = 1, \dots, N$

System diskreter Punktladungen

Potentielle Energie W^S des Gesamtsystems $\hat{=}$ Arbeit, um die q_i's aus dem Unendlichen an die Orte $\underline{r}_i$ zu bringen!

<u>Anfangssituation:</u>

- alle Ladungen sind unendlich weit voneinander entfernt

$\Rightarrow$ Raum ist feldfrei $\Rightarrow \Phi^{\text{Anfang}} = 0$

Sei W_1 die Arbeit um q_1 nach $\underline{r}_1$ zu bringen.

$$W_1 = 0 \quad , \text{da } \Phi^{\text{Anfang}} = 0 \; !$$

$$W^S = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_N$$

W_2 : Arbeit, um q_2 heranzuführen (zum Ort $\underline{r}_2$) in dem von q_1 jetzt erzeugten Feld

$$W_2 = q_2 \Phi_1(\underline{r}_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_2 - \underline{r}_1|} = W_2(\underline{r}_2)$$

analog:

$$W_3 : q_3 \left(\Phi_1(\underline{r}_3) + \Phi_2(\underline{r}_3) \right)$$

$$= q_3 \sum_{j=1}^{2} \frac{q_j}{|\underline{r}_3 - \underline{r}_j| 4\pi\varepsilon_0} = W(\underline{r}_3)$$

$$\vdots$$

$$W_N = q_N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_N - \underline{r}_j|} = W(\underline{r}_N)$$

Gesamte potentielle Energie

$$W^S = \sum_{i=1}^{N} W_i(\mathbf{r}_i) = \underbrace{\sum_{i=2}^{N} W_i(\mathbf{r}_i)}_{\text{da } W_1 = 0}$$

$$= \sum_{i=2}^{N} q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

$$W^S = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}_{W_{ij}} \quad (*)$$

beachte: $W_{ij} = W_{ji}$

Daher ist (*) äquivalent zum Ausdruck

$$W^S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Doppelsumme ohne Diagonalterme!