

Wk: Feldenergie

Betrachte System aus Punktladungen (N)

Potentielle Energie  $W^S \hat{=}$  Arbeit, um die  $q_i$   
des Gesamtsystems aus dem Unendlichen  
an die Orte  $r_i$  zu bringen!

$$W^S = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_N$$

$$W_1 = 0, \text{ da } \phi \text{ Anfang} = 0!$$

(Arbeit um die erste Ladung  $q_1$  nach  $r_1$  zu bringen)

$$W_2 = q_2 \phi_1(r_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |r_2 - r_1|} = W_2(r_2)$$

$$W^S = \sum_{i=1}^N W_i(r_i) \stackrel{W_1=0}{=} \sum_{i=2}^N W_i(r_i) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |r_i - r_j|}$$

Das ist äquivalent zum Ausdruck

$$W^S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |r_i - r_j|} \quad (*)$$

Umschreiben für eine kontinuierliche Ladungsverteilung

(warum? Punktladung sind theoret. Konstruktion,  
aber unrealistisch!)

Idee: Ersetze in  $(*)$   $\sum_i q_i \rightarrow \int d^3r \rho(r)$

Damit ergibt sich folgender Ausdruck.

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(r) \rho(r')}{|r-r'| 4\pi\epsilon_0} \quad (**)$$

### Spezialfall

Betrachte wieder System aus Punktladungen

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(r-r_i)$$

einsetzen in  $(**)$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \int d^3r \int d^3r' \frac{\delta(r-r_i) \delta(r'-r_j)}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |r_i - r_j|} \end{aligned}$$

Im Unterschied zur ~~früher~~ früheren Formel  $(**)$  wird hier über alle Beiträge summiert

Beiträge der Wechselwirkung ~~der~~ von Ladungen "mit sich selbst" werden

nicht ausgedrückt

→ sogenannte "Selbstenergieanteile"

Beachte auch:

Die Terme mit  $i=j$  divergieren aufgrund der Divergenz des Coulombpotentials bei  $r=0$ ! "Selbstenergieprobleme"

Verschiebe das Problem auf später...

nochmal zurück zum Ausdruck für  $W$  mit kontinuierl. Ladungsverteilung

$$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho(\underline{r}) \rho(\underline{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Ziel:

umschreiben, dass das <sup>elektrost.</sup> Potential bzw. Feld auftritt

benutze:  $\Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0}$  (2)

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (1)$$

$$W = \leftarrow (1) \quad \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r}) \phi(\underline{r})$$

$$\Rightarrow W = \leftarrow (2) \quad - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Delta \phi(\underline{r}) \cdot \phi(\underline{r})$$

benutze  
(inverse Produktregel)

$$\frac{\text{div}(\text{grad } \phi)}{\Delta \phi} \phi = \text{div}(\text{grad } \phi \phi) - \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi$$

$$\Rightarrow W = - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \nabla \cdot (\nabla \phi \cdot \phi) + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\nabla \phi)^2$$

1. Term auf der rechten Seite:

Gauß'sche Satz anwenden!

$$\int_V d^3r \nabla \cdot (\nabla \phi \cdot \phi) = \int dF (\nabla \phi(r) \cdot \phi(r))$$

Wir führen dieses Oberflächenintegral über eine Kugel in unendlich weite Ferne aus!

Folgerung:  $\phi \sim \frac{1}{r}$  Wert weg von der Ladungsdichte dominiert immer der "Kugelpotential"

$\nabla \phi \sim \frac{1}{r^2}$

$\Rightarrow$  Integrand fällt ab wie  $\frac{1}{r^3}$

$$dF = r^2 d\Omega$$

Winkelanteil

$\Rightarrow$  Produkt  $dF \times$  Integrand verschwindet wie  $\frac{1}{r}$  für  $r \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$  Integral verschwindet!

Es bleibt also:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\nabla \phi(r))^2$$

benutze  $\underline{E} = -\nabla \phi(r)$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r (E(r))^2$$

oder

$$W = \int d^3r w(r)$$

mit  $w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} (E(r))^2$

Energiedichte des  
elektrostatisches Feldes

Bemerkung

a)  $W$  ist offensichtlich positiv, da  $E$  quadratisch  
eingesetzt!

Das ist ein implizites Hinweis  
darauf, daß  $W$  Anteil aus der  
"Selbstenergie" enthält

Denn: Für System aus Punktladungen kann  
der Ausdruck für  $W^S$  (=  $W$  ohne

auch negativ werden!

Selbstenergie-  
anteil

$$W^S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

b) Betrachte nochmal das "Selbstenergieproblem"

anhand des Ausdrucks für  $W$   
für ein geladenes Teilchen

i) Eine Punktladung bei  $\underline{r} = 0$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underline{e}_r$$

$$\Rightarrow w(\underline{r}) = \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2}}_{\text{Energiedichte}} \underline{E}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$W = \int d^3r w(\underline{r})$$

$$= \int d^3r \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$\rightarrow 4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^{\infty} dr \underbrace{r^2 \frac{1}{r^4}}_{r^{-2}}$$

Kugelkoordinat

Divergenz am unteren Rand  
( $r=0$ )  
Ausdruck der  
 $\rightarrow$  Selbstenergieprobleme!

(c) Betrachte nun eine homogene, ~~also~~  
geladene Vollkugel  
mit ~~Weg~~ Zentrum bei  $r=0$

$$\rho(r) = \rho(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi R^3}, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases}$$

Kernladungszahl  
Modell für  
Atomkern

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & r < R \\ \frac{Ze}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

Radius



daraus  $\underline{E} = -\nabla\Phi$



$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) \stackrel{\text{Vollkugel}}{=} \underline{E}_N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} Q \frac{r^2}{R^3}, r < R \\ \frac{Q}{r^2}, r > R \end{array} \right.$$

mit  $Q = Ze_0$

$$W = \int d^3V w(\underline{r}) = \int d^3V \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2$$

$$= \dots = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \begin{array}{l} \text{endlicher Wert} \\ \text{für alle} \\ R > 0! \end{array}$$

Radius

Interpretiert man diese Resultate für  $W$  als Selbstenergie (da wir ja nur einen geladenen Körper betrachtet haben)

dann sieht man:

ausgedehnte Körper sind unproblematisch

Punktladung jedoch "pathologisch" !

## II. 5. Multipolentwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r}')$



z.B. Molekül mit  
Ladungen  
(DNA !)

Potential (ohne Randbedingungen)

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad \text{⊗}$$

Falls  $\rho(\underline{r}')$  keine einfache Symmetrie hat,  
ist  $\Phi(\underline{r})$  meist schwierig auszurechnen!

Idee bei der Multipolentwicklung:

Häufig interessiert man sich nur für das Verhalten  
von  $\Phi(\underline{r})$  und  $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\Phi$  "weit weg" von  
der Ladungsverteilung!

Frage:

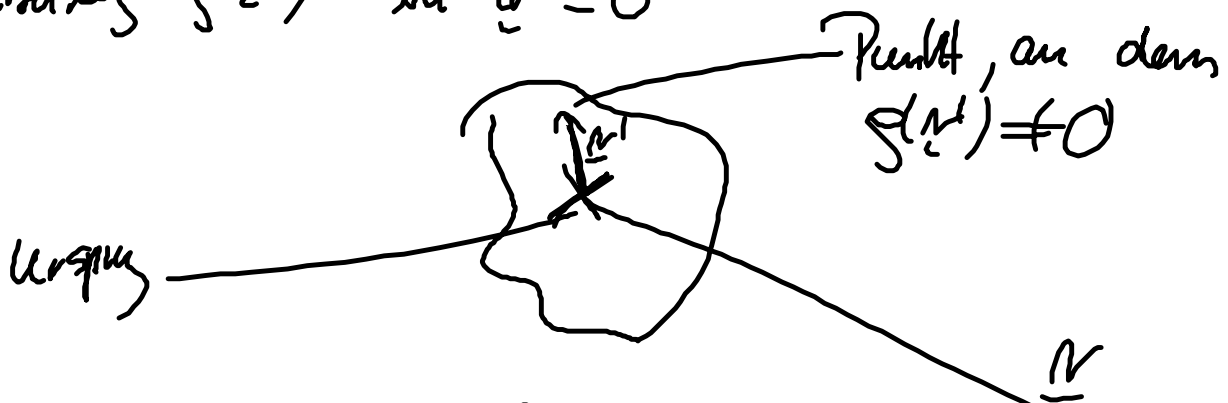
Kann man dann das Potential

Einfache Ausdrücke?

→ ja, durch Multipliziertere

Ausgangspunkt:

Nehme an, dass das Zentrum der Verteilung  $g(r')$  bei  $r'=0$



Wir interessieren uns für:

$\Phi$  und  $E$  an Orten  $\underline{r}$ ,  $\hat{=} \frac{r'}{r} \ll 1$

für die gilt:

$$\boxed{r \gg r'}$$

Abstand vom Zentrum der Ladungsverteilung

alle Abstände von Punkten innerhalb des Volumens, wo  $g(r') \neq 0$

$\Phi(r)$ ?  
 $E(r)$ ?

Strategie: Wir entwickeln die

Funktion  $\frac{1}{|r-r'|}$  in  $\textcircled{*}$

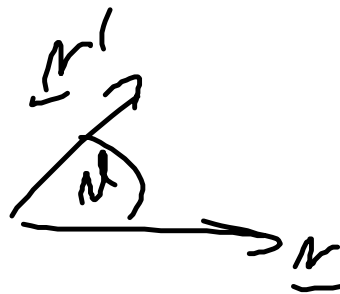
nach Potenzen von  $\frac{r'}{r}$

$$\Phi(r) \sim \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}$$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{\sqrt{(r-r')^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha}}$$



Taylorentwicklung der

Funktion  $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha}}$

in Potenzen von  $\frac{r'}{r}$  um  $\frac{r'}{r} = 0$

man findet:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \alpha - 1) \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right)$$

+ ... )

Allgemein:

$$\frac{1}{N - N^4} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{N^4}{N}\right)^l P_l(\cos \mu)$$

mit  $P_l(x) = \frac{1}{l!} \left[ \frac{\partial^l}{\partial t^l} (1 - 2tx + t^2)^{\frac{N}{2}} \right]_{t=0}$

Legendrepolynome

hier:  $x = \cos \mu$

$$t = \frac{N^4}{N}$$

Einsetzen in den Ausdruck für das ~~die~~ datenspezifische Polynom

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' g(r')$$

↑  
Punkt außerhalb  
der Ladungsverteilung

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\alpha)$$

Integral über das  
begrenzte Volumen, das  
die Ladungsverteilung umschließt!

Definiere

$$Q_l = \int d^3r' g(r') (r')^l P_l(\cos\alpha)$$

$l$ -tes Multipolmoment der  
Ladungsverteilung

Dann folgt

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l \frac{1}{r^{l+1}}$$

Das Potenzial wird also dargestellt als Reihe  
in Potenzen von  $1/r$

Kontrol:  $\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{r} + \frac{Q_1}{r^2} + \frac{Q_2}{r^3} + \dots \right)$