

Wk: Feldenergie

Betrachte System aus Punktladungen (N)

Potentielle Energie $W^S \hat{=}$ Arbeit, um die q_i
des Gesamtsystems aus dem Unendlichen
an die Orte r_i zu bringen!

$$W^S = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_N$$

$$W_1 = 0, \text{ da } \oint \text{Arbeit} = 0!$$

(Arbeit um die erste Ladung q_1 nach r_1 zu bringen)

$$W_2 = q_2 \Phi_1(r_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |r_2 - r_1|} = W_2(r_2)$$

$$W^S = \sum_{i=1}^N W_i(r_i) \stackrel{W_1=0}{=} \sum_{i=2}^N W_i(r_i) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |r_i - r_j|}$$

Das ist äquivalent zum Ausdruck

$$W^S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |r_i - r_j|} \quad (*)$$

Umschreiben für eine kontinuierliche Ladungsverteilung

(Warum? Punktladungen sind theoret. Konstruktion,
aber unrealistisch!)

Idee: Ersetze in $(*) \sum_i q_i \rightarrow \int d^3r g(r)$

Damit ergibt sich folgender Ausdruck.

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{g(r)g(r')}{|r-r'|^2 \epsilon_0} \quad (**)$$

Spezialfall

Betrachte wieder System aus Punktladungen

$$g(r) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(r - r_i)$$

einsetzen in $(**)$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \int d^3r \int d^3r' \frac{\delta(r - r_i) \delta(r' - r_j)}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |r_i - r_j|} \end{aligned}$$

Im Unterschied zur ~~früher~~ früheren Formel $(*)$ W^s wird hier über alle Beiträge summiert

Beiträge der Wechselwirkung ~~der~~ von Ladungen "mit sich selbst" werden

hier aus geschlossene

→ sogenannte "Selbstenergieanteil"

Beachte auch:

Die Terme mit $i=j$ divergieren aufgrund der Divergenz des Coulombpotentials bei $r=0$! "Selbstenergieproblem"

Verschiebe das Problem auf später...

nochmal zurück zum Ausdruck für W mit kontinuierl. Ladungsverteilung

$$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho(\underline{r}) \rho(\underline{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Ziel:

umschreiben, dass das ^{elektrostatische} Potential kor. Feld aufbaut

benutze: $\Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0}$ (2)

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad \textcircled{1}$$

$$W = \leftarrow \textcircled{1} \quad \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r}) \Phi(\underline{r})$$

$$\Rightarrow W = \leftarrow \textcircled{2} \quad - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Delta \Phi(\underline{r}) \cdot \Phi(\underline{r})$$

benutze
(Inverse Produktregel)

$$\frac{\text{div}(\text{grad } \Phi)}{\Delta \Phi} \Phi = \text{div}(\text{grad } \Phi \cdot \Phi) - \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Phi$$

$$\Rightarrow W = - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \nabla \cdot (\nabla \Phi \cdot \Phi) + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\nabla \Phi)^2$$

1. Term auf der rechten Seite:

Gauß'scher Satz anwenden!

$$\int_V d^3r \nabla \cdot (\nabla \phi \cdot \phi) = \int dE (\nabla \phi(r) \cdot \phi(r))$$

Take this surface integral over
 eine Kugel in unendlich weit Ferne
 aus!

Folge: $\phi \sim \frac{1}{r}$

$$\nabla \phi \sim \frac{1}{r^2}$$

Wird weg von der
 Ladungsdichte
 entfernt immer
 der "Kugelpolster"

\Rightarrow Integrand fällt ab wie $\frac{1}{r^3}$

$$dE = r^2 d\Omega$$

Winkelanteil

\Rightarrow Produkt $dE \times$ Integrand
 verschwindet wie $\frac{1}{r}$ für $r \rightarrow \infty$

\Rightarrow Integral verschwindet!

Es bleibt also:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\nabla \phi(r))^2$$

benutze
 $\underline{E} = -\nabla \phi(r)$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r (E(r))^2$$

oder

$$W = \int d^3r w(r)$$

$$\text{mit } w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} (E(r))^2$$

Energiedichte der
elektrost. Felder

Bemerkung

a) W ist offensichtlich positiv, da E quadratisch
eriselt!

Das ist ein implizites Hinweis
darauf, daß W Anteil aus der
"Selbstenergie" enthält

Denn: Für System aus Punktladungen kann
der Ausdruck für W^S (= W ohne

auch negativ werden!

Selbstenergie
anteil

$$W^S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

b) Betrachte nochmal das "Selbstenergieproblem"

anhand des Ausdrucks für W
für ~~ein~~ ein geladenes Teilchen

i) Eine Punktladung bei $\underline{r} = 0$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underline{e}_r$$

$$\Rightarrow w(\underline{r}) = \underbrace{\epsilon_0}_{\text{Energiedichte}} \underline{E}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$W = \int d^3r w(\underline{r})$$

$$= \int d^3r \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$\rightarrow \text{Kugelkondensat} \quad = 4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \int_0^{\infty} dr \underbrace{r^2 \frac{1}{r^4}}_{r^{-2}}$$

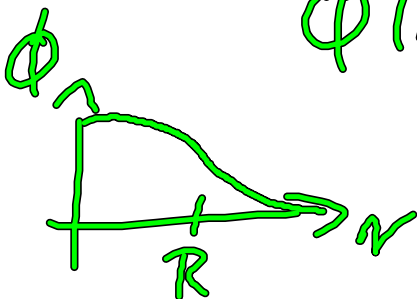
Divergenz am unteren Rand
($r=0$)
Ausdruck da
 \rightarrow Selbstenergieproblem!

(c) Betrachte nun eine homogen ~~geladene~~
geladene Vollkugel
mit ~~dem~~ Zentrum bei $r=0$

$$\rho(r) = \rho(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi R^3}, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Kugelkondensat} \\ \text{Modell für} \\ \text{Atomkern} \end{array}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & r < R \\ \frac{Ze}{r}, & r \geq R \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Radius} \end{array}$$

daraus $\underline{E} = -\nabla\phi$



$$\Rightarrow E(\text{Vollkugel}) = \frac{1}{4\pi R^2} \left\{ \begin{array}{l} Q \frac{R^2}{R^2}, \text{NR} \\ \frac{Q}{r^2}, \text{NR} \end{array} \right.$$

mit $Q = Ze_0$

$$W = \int d^3V w(\underline{r}) = \int d^3V \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2$$

$$= \dots = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{endlicher Wert für alle } R > 0!$$

Radius:

Interpretiert man diese Resultate für W als Selbstenergie (da wir ja nur energie geladene Körper behandelte!)

dann sieht man:

ausgedehnte Körper sind unproblematisch

Punkt Ladung jedoch "pathologisch" !

II.5. Multipolentwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$



z.B. Helium mit
Ladungen
(DNA !)

Potential (durch Randbedingungen)

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad \oplus$$

Falls $\rho(\underline{r}')$ keine einfache Symmetrie hat,
ist $\Phi(\underline{r})$ meist schwierig auszurechnen!

Idee bei der Multipolentwicklung:

Heißt interessant & man sich nun für das Verhalten
von $\Phi(\underline{r})$ und $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\Phi$ "weit weg" von
der Ladungsverteilung!

Frage:

Kann man dann das Potential

Einfache Ausdrücke?

→ ja, durch Multiplizieren

Ausgangspunkt:

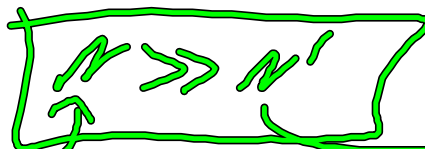
Nehme an, dass das Zentrum der Verteilung $g(r')$ bei $r'=0$



Wir interessieren uns für:

Φ und E am Ort \underline{r} , $\frac{V'}{V} \ll 1$

für die gilt:

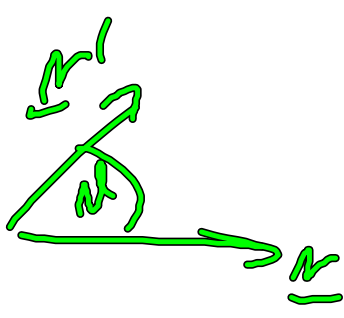


Abstand vom Zentrum der Ladungsverteilung

alle Abstände von Punkten innerhalb des Volumens, wo $g(r') \neq 0$

$\Phi(\underline{r})?$
 $E(\underline{r})?$

Strategie: Wir entwickeln die
 Funktion $\frac{1}{|r-r'|}$ in $\textcircled{*}$
 nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$ $\left(\frac{r'}{r} \ll 1 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r-r'|} &= \frac{1}{\sqrt{(r-r')^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha}} \end{aligned}$$


Taylorentwicklung der

Funktion: $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha}}$

in Potenzen von $\frac{r'}{r}$ um $\frac{r'}{r} = 0$

man findet:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha + \frac{1}{2} 3 \cos^2 \alpha \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right)$$

+ ...)

Allgemein:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N-1}{l} P_l(\cos \mu)$$

mit $P_l(x) = \frac{1}{l!} \left[\frac{\partial^l}{\partial x^l} (1-2xx+x^2)^{\frac{N-1}{2}} \right]_{x=0}$

Legendrepolynom

hier: $x = \cos \mu$

$$l = \frac{N-1}{2}$$

Einsetzen in den Ausdruck für das ~~der~~ ^{Legendre} ~~Legendre~~ ^{Polynom}

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{N} \int d^3r' g(r')$$

↑
Punkt außerhalb
der Ladungsverteilung

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

Integral über das
begrenzte Volumen, das
die Ladungsverteilung umschließt!

Definiere

$$Q_l = \int d^3r' g(r') (r')^l P_l(\cos\theta)$$

l-tes Multipolmoment der
Ladungsverteilung

Dann folgt

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l \frac{1}{r^{l+1}}$$

Das Potenzial wird also dargestellt als Reihe
in Potenzen von $\frac{1}{r}$

Wert: $\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_0}{r} + \frac{Q_1}{r^2} + \frac{Q_2}{r^3} + \dots \right)$