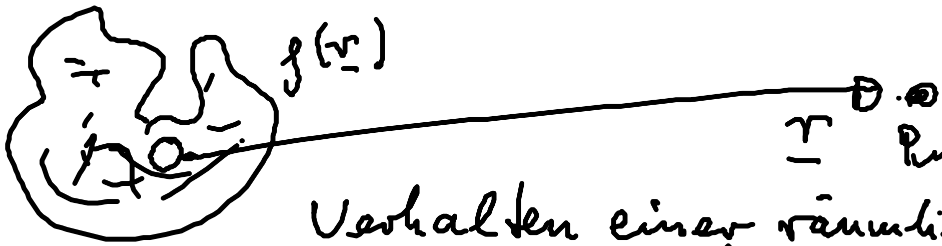
# WH: Multipolentwicklung

Idee:




Verhalten einer räumlich begrenzten Verteilung von Ladungen fern ihrer Ausdehnung

↪ Entwicklung des Potentials $\Phi(\underline{r})$ der Ladungsverteilung $\rho$ nach großen Abständen

$$\underline{\Phi}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Entwickle $\quad \frac{r'}{r} \ll 1$

$$= \dots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q_l}{r^{l+1}}$$

mit den Multipolen

$$Q_l = \int d^3r' \rho(\underline{r}')\, r'^l \, P_l(\cos\vartheta)$$

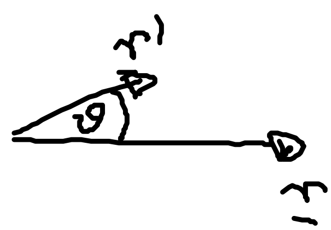
Legendre-Pol.

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$\vdots$




Idee der Multipolentwicklung: höhere Multipole sind „klein" und können vernachlässigt werden

→ Abbrechen der Reihe nach wenigen Termen

## Betrachtung der ersten Terme

* **$\ell = 0$** „Monopolterm"

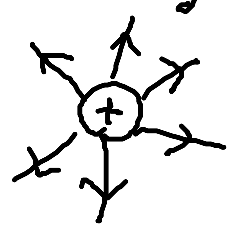
$$Q_0 = \int d^3r\, \rho(\underline{r}) = Q \quad , \text{ Skalar}$$

die Gesamtladung der Verteilung $\rho$

Monopolpotential:

$$\Phi^{(\ell=0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r} \qquad \text{Punktladung!}$$

Interpretation: Sehr weit weg von der Ladungsverteilung „sieht diese aus" wie eine Punktladung mit der Ladung $Q = Q_0$

einfachste Realisierung: 

Punktladung

* **$\ell = 1$** „Dipolmoment"

Dipolmoment wird wichtig, wenn Ladungsverteilung insgesamt neutral ist, d.h. $Q = Q_0 = 0$

$$Q_1 = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, r' \cos\vartheta$$


$$\cos\vartheta = \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r\, r'}$$

$$= \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, r' \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r\, r'} =: \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r}$$

mit $\boxed{\underline{p} = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, \underline{r}'}$ Vektor

dem (kartesischen) Dipolmoment

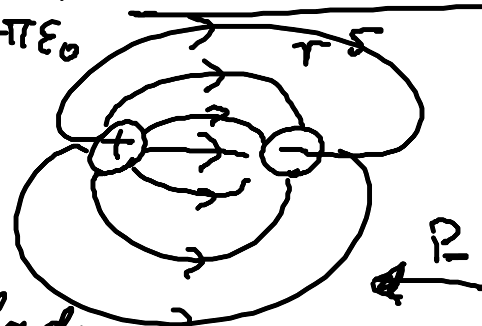
<u>Dipolpotential:</u>

$$\underline{\Phi}^{(l=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3} \sim 1/r^2$$

<u>E-Feld:</u>

$$\underline{\underline{E}}^{(l=1)}(\underline{r}) = -\nabla\underline{\Phi}^{(l=1)}(\underline{r}) \overset{(A1c)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}}{r^5}$$

einfachste Realisierung: zwei Punktladungen




Anmerkung: $\underline{p}$ zeigt in „Richtung" des positiven Ladungsschwerpunkts

* <u>$l=2$</u> „Quadrupol"

$$Q_2 = \int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,r'^2\,\frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1)$$

$$= \ldots = \frac{1}{2r^2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\,x_i\,x_j$$

mit $$\boxed{Q_{ij} = \int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,(3x'_i x'_j - \delta_{ij}\,r'^2)}$$

<u>Tensor</u>

dem kartesischen Quadrupolmoment

Eigenschaften: · Spurlos $\sum_i Q_{ii} = 0$

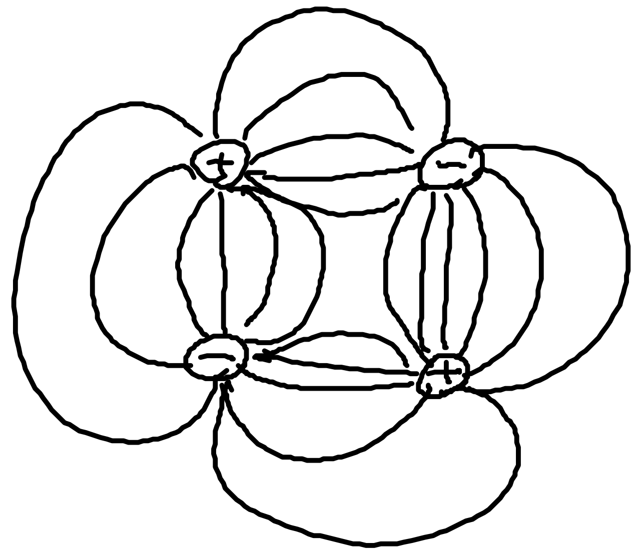
· symmetrisch $Q_{ij} = Q_{ji}$

→ 5 unabhängige Komponenten

## Quadrupolpotential

$$\Phi^{(l=2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{r^3} = \ldots \sim 1/r^3$$

einfachste Realisierung:
Kombination
zweier Dipole



## Zusammenfassung

Potential weit weg von der Ladungsverteilung:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left( \frac{Q_0}{r} + \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} x_i x_j + \ldots \right)$$

Je näher man der Ladungsverteilung kommt, desto mehr Terme sind zu berücksichtigen

## II.6 Wechselwirkung einer Ladungsverteilung mit einem externen Feld

- Bekannt aus II.4:

Energie $W$ einer Ladungsverteilung $\rho$ in ihrem eigenen Potential:

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\underline{r})\,\Phi(\underline{r})$$

• **Frage**: Wie ist die Energie $W_{ext}$ einer Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$ in einem externen Potential $\Phi_{ext}$, welches durch eine bereits vorhandene Ladungsverteilung $\rho_{ext}(\underline{r})$ erzeugt wird?

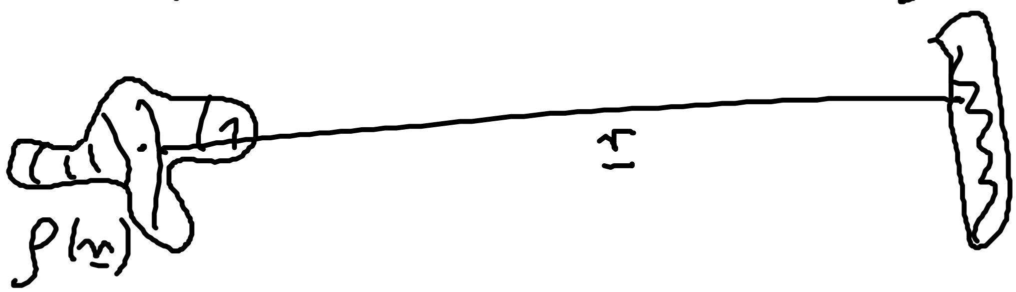
**Antwort**:

$$W_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r})\,\rho_{ext}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \qquad (1)$$

$$= \int d^3r \, \rho(\underline{r}) \, \Phi_{ext}(\underline{r})$$

• betrachte wieder lokalisierte Ladungsverteilung $\rho$ (um $\underline{r} = \underline{0}$). Im Gebiet mit $\rho(\underline{r}) \neq 0$, soll das externe Potential nur <u>schwach</u> variieren.

Idee: $\rho_{ext}$ ist „weit weg" von $\rho$ $\Rightarrow$ $\Phi_{ext}$ ändert sich bei $\underline{r} = \underline{0}$ kaum




$\rightarrow$ Taylor-Entwicklung von $\Phi_{ext}$ um $\underline{r} = \underline{0}$:

$$(2) \qquad \Phi_{ext}(\underline{r}) \simeq \Phi_{ext}(\underline{r} = \underline{0}) + \underline{r}\cdot\underline{\nabla}\,\Phi_{ext}(\underline{r})\Big|_{r=0} + \frac{1}{2}(\underline{r}\cdot\underline{\nabla})^2\,\Phi_{ext}(\underline{r})\Big|_{r=0} + \ldots$$

betrachte 2. Term:

$$\underline{r} \cdot \underline{\nabla}\, \Phi_{ext}(\underline{r})\Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = -\underline{r} \cdot \underline{E}_{ext}(\underline{r}=\underline{0})$$

betrachte 3. Term:

$$\frac{1}{2}(\underline{r}\cdot\underline{\nabla})^2\, \Phi_{ext}(\underline{r})\Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3} x_k\, x_l \frac{\partial^2 \Phi_{ext}(\underline{r})}{\partial x_k\, \partial x_l}\Big|_{\underline{r}=\underline{0}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{ext}(\underline{r})}{\partial x_k\, \partial x_l} = -\frac{\partial E_{ext,k}(\underline{r})}{\partial x_l}$$

außerdem gilt:

$\underline{\nabla}\cdot\underline{E}_{ext}(\underline{r}=0) = 0$, $\varrho_{ext}$ weit weg ist

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial E_{ext,k}(\underline{r})}{\partial x_k}\Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = 0$$

$$\text{bzw.} \quad \sum_{k,l=1}^{3} \frac{\partial E_{ext,k}(\underline{r})}{\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0} \delta_{k,l} = 0$$

Diese „Null" addieren wir zum dritten hinzu

$$\frac{1}{2}(\underline{r}\cdot\underline{\nabla})^2\, \Phi_{ext}(\underline{r})\Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3} \overbrace{\left(-x_k x_l + \frac{r^2}{6}\delta_{k,l}\right)}^{\text{Form des Quadrupoltensors}} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \frac{\partial E_{ext,k}(\underline{r})}{\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=\underline{0}}$$

Damit wird $\Phi_{ext}$ in (2) nahe $\underline{r}=\underline{0}$ zu:

$$\Phi_{ext}(\underline{r}) \simeq \Phi_{ext}(\underline{0}) - \underline{r}\cdot \underline{E}_{ext}(\underline{0}) + \left\{ - \frac{1}{6}\sum_{k,l=1}^{3} \left(3 x_k x_l - r^2 \delta_{k,l}\right) \frac{\partial E_{ext,k}}{\partial x_l}\bigg|_{\underline{r}=0} \right\}$$

Das setzen wir in (1) ein:

$$W_{ext} = \int d^3 r\, \rho(\underline{r})\, \Phi_{ext}(\underline{r})$$

$$= \int d^3 r\, \rho(\underline{r}) \left[ \Phi_{ext}(\underline{0}) - \underline{r}\cdot \underline{E}_{ext}(\underline{0}) + \dots \right]$$

$$\boxed{W_{ext} = Q\, \Phi_{ext}(\underline{0}) - \underline{P}\cdot \underline{E}_{ext}(\underline{0}) - \frac{1}{6}\sum_{k,l=1}^{3} Q_{k,l} \frac{\partial E_{ext,k}}{\partial x_l}\bigg|_{\underline{r}=0} + \dots}$$

○ Größen der Ladungsverteilung $\rho$ bei $\underline{r}=\underline{0}$

○ Größen der externen Ladungsverteilung $\rho_{ext}$

Also:

- Gesamtladung $Q$ wechselwirkt mit dem Potential $\Phi_{ext}$
- Dipolmoment $\underline{P}$ —— " —— $\underline{E}$-Feld $\underline{E}_{ext}$
- Quadrupolmoment $Q_{ij}$ —— " —— Ableitung des $\underline{E}$-Feldes

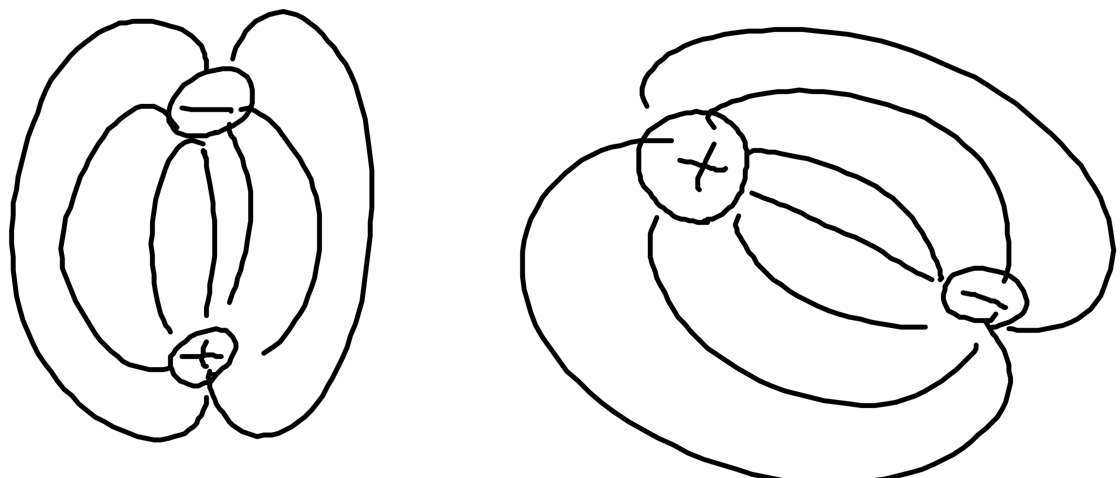
- wichtiger Spezialfall: WW zweier Dipole

Annahme: Sowohl Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$ bei $\underline{r}_1 = \underline{0}$ als auch $\rho_{ext}(\underline{r})$ werden allein durch das Dipolmoment beschrieben

Dipol bei $\underline{r}_1$ Dipol bei $\underline{r}_2$

$$W_{ext} = -\underline{p}_1 \cdot \underline{E}_{Dipol2}(\underline{r}_1)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2}{r_1^3} - \frac{(\underline{p}_1 \cdot \underline{r}_1)(\underline{p}_2 \cdot \underline{r}_1)}{r_1^5}\right)$$



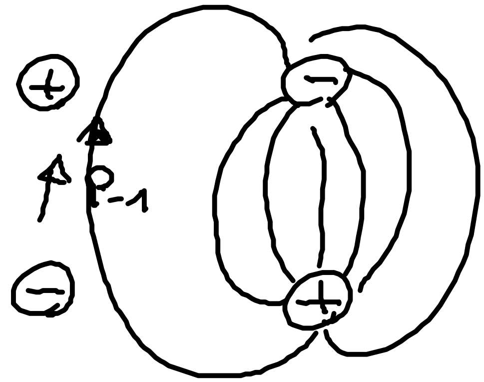
charakteristisch: • Abstandsabhängigkeit $1/r^3$

• Richtungsabhängigkeit !

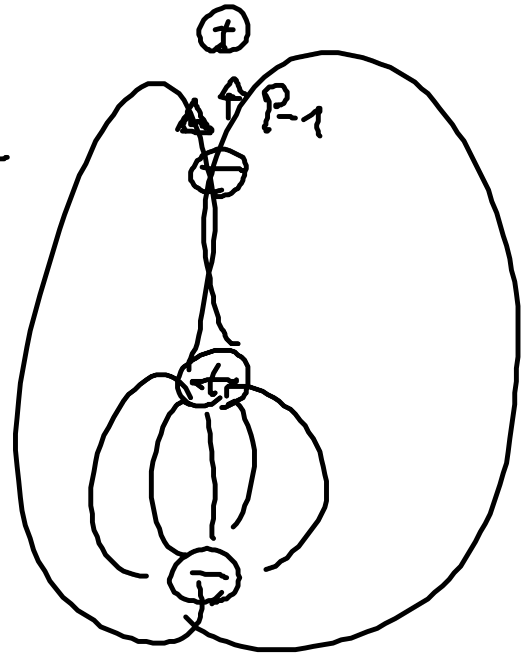
Frage: Welche Konfiguration der Dipole ist energetisch günstig?

$\hookrightarrow W_{ext} = -\underline{p}_1 \cdot \underline{E}_{Dipol2}(\underline{r}_1)$

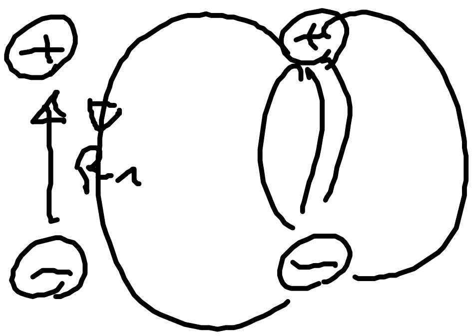
$\Rightarrow \quad p_1 \uparrow\uparrow E_{Dipol\,2}(r_1)$



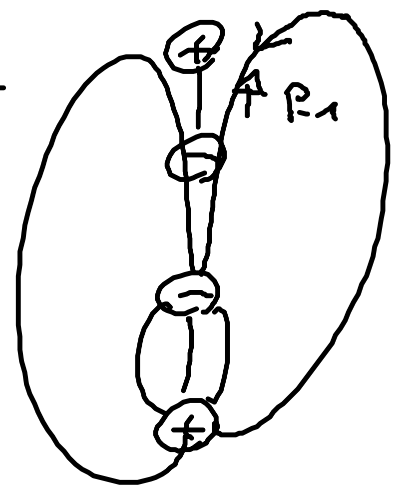

oder




$W_{ext} < 0$, attraktiv




, oder




$W_{ext} > 0$, repulsiv