

# WH: Multipolentwicklung



$\tau$  Punktladung  
Verhalten einer räumlich begrenzten Verteilung von Ladungen fern ihrer Ausdehnung

↳ Entwicklung des Potentials  $\Phi(\underline{r})$  der Ladungsverteilung  $\rho$  nach großen Abständen

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Entwickle  $\frac{r'}{r} \ll 1$

$$= \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q_l}{r^{l+1}}$$

mit den Multipolen

Legendre-Pol.

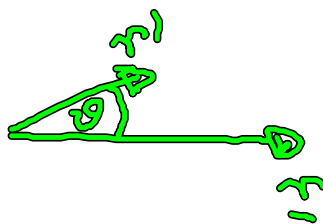
$$Q_l = \int d^3r' \rho(\underline{r}') r'^l P_l(\cos\vartheta)$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

⋮



Idee der Multipolentwicklung: höhere Multipole sind "klein" und können vernachlässigt werden  
→ Abbrechen der Reihe nach wenigen Termen

Betrachtung der ersten Terme

\*  $l=0$  "Monopolterm"

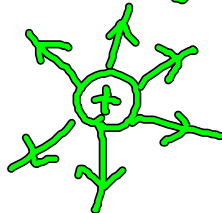
$$Q_0 = \int d^3r \rho(\underline{r}) = Q, \text{ Skalar}$$

die Gesamtladung der Verteilung  $\rho$

Monopolpotential:

$$\Phi^{(l=0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r} \quad \text{Punktladung?}$$

Interpretation: Sehr weit weg von der Ladungsverteilung "sieht diese aus" wie eine Punktladung mit der Ladung  $Q = Q_0$

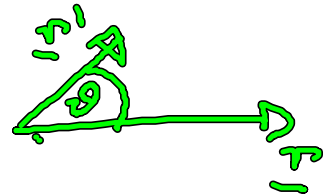
einfachste Realisierung:  Punktladung

\*  $l=1$  "Dipolmoment"

Dipolmoment wird wichtig, wenn Ladungsverteilung insgesamt neutral ist, d. h.  $Q = Q_0 = 0$

$$Q_1 = \int d^3r' \rho(\underline{r}') r' \cos\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r r'}$$



$$= \int d^3r' \rho(\underline{r}') r' \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r r'} =: \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r}$$

mit

$$\underline{p} = \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underline{r}'$$

Vektor

den (heavisiden) Dipolmoment

## Dipolpotential:

$$\Phi^{(l=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} \sim 1/r^2$$

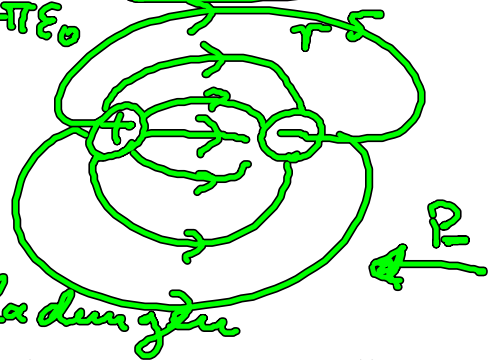
## E-Feld:

$$\underline{E}^{(l=1)}(\underline{r}) = -\nabla \Phi^{(l=1)}(\underline{r}) \stackrel{(41c)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 \underline{p}}{r^5}$$

einfachste Realisierung:

Zwei

Punktladungen



Anmerkung:  $\underline{p}$  zeigt in „Richtung“  
des positiven Ladungsschwerpunkts

\*  $l=2$  „Quadrupol“

$$Q_2 = \int d^3r' \rho(\underline{r}') r'^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

$$= \dots = \frac{1}{2r^2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_i x_j$$

mit Tensor  $Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\underline{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)$

den kartesischen Quadrupolmoment

Eigenschaften: • Spurlos  $\sum_i Q_{ii} = 0$

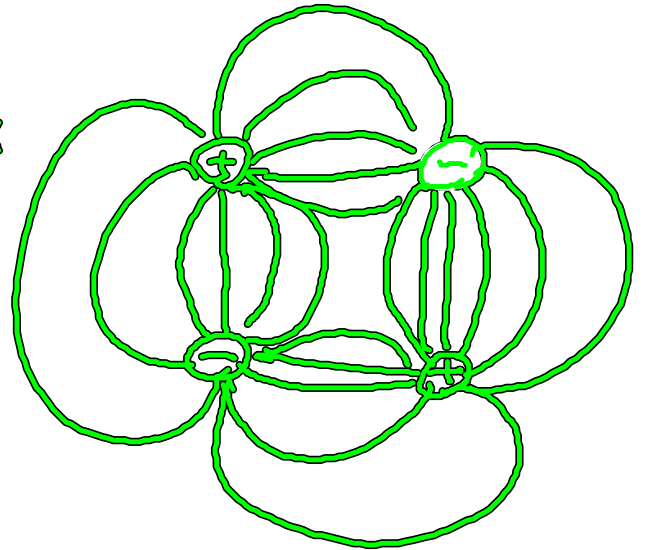
• symmetrisch  $Q_{ij} = Q_{ji}$

→ 5 unabhängige Komponenten

## Quadrupolpotential

$$\Phi^{(l=2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r^3} = \dots \sim 1/r^3$$

einfachste Realisierung:  
Kombination  
zweier Dipole



## Zusammenfassung

Potential weit weg von der Ladungsverteilung:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_i x_j \right)$$

Je näher man der Ladungsverteilung  $\dagger \dots$   
kommt, desto mehr Terme sind zu berücksichtigen

## II.6 Wechselwirkung einer Ladungsverteilung mit einem externen Feld

• Bekannt aus II.4:

Energie  $W$  einer Ladungsverteilung  $\rho$  in ihrem eigenen Potential:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r})$$

- Frage: Wie ist die Energie Wert einer Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r})$  in einem externen Potential  $\Phi_{\text{ext}}$ , welches durch eine bereits vorhandene Ladungsverteilung  $\rho_{\text{ext}}(\underline{r})$  erzeugt wird?

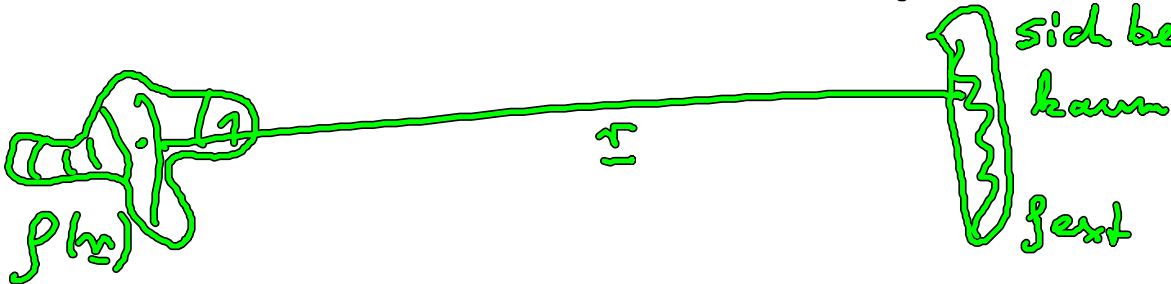
Antwort:

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}) \rho_{\text{ext}}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (1)$$

$$= \int d^3r \rho(\underline{r}) \Phi_{\text{ext}}(\underline{r})$$

- betrachte wieder lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho$  (um  $\underline{r} = \underline{0}$ ). Im Gebiet mit  $\rho(\underline{r}) \neq 0$ , soll das externe Potential un schwach variieren.

Idee:  $\rho_{\text{ext}}$  ist „weit weg“ von  $\rho \Rightarrow \Phi_{\text{ext}}$  ändert sich bei  $\underline{r} = \underline{0}$  kaum



→ Taylor-Entwicklung von  $\Phi_{\text{ext}}$  um  $\underline{r} = \underline{0}$ :

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \simeq & \Phi_{\text{ext}}(\underline{r} = \underline{0}) + \underline{r} \cdot \underline{\varrho} \Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \Big|_{\underline{r} = \underline{0}} \\ & + \frac{1}{2} (\underline{r} \cdot \underline{\varrho})^2 \Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \Big|_{\underline{r} = \underline{0}} + \dots \end{aligned} \right\}$$

betrachte 2. Term:

$$\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = -\underline{r} \cdot \underline{E}_{\text{ext}}(\underline{r}=\underline{0})$$

betrachte 3. Term:

$$\frac{1}{2} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla})^2 \Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 x_k x_l \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}(\underline{r})}{\partial x_k \partial x_l} \Big|_{\underline{r}=\underline{0}}$$

$$= - \frac{\partial E_{\text{ext},k}(\underline{r})}{\partial x_l}$$

außerdem gilt:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E}_{\text{ext}}(\underline{r}=\underline{0}) = 0, \text{ fest weit weg ist}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^3 \frac{\partial E_{\text{ext},k}(\underline{r})}{\partial x_k} \Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = 0$$

$$\text{bzw.} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial E_{\text{ext},k}(\underline{r})}{\partial x_l} \Big|_{\underline{r}=\underline{0}} \delta_{kl} = 0$$

Diese „Null“ addieren wir zum dritten  
 linke

$$\frac{1}{2} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla})^2 \Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \Big|_{\underline{r}=\underline{0}} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \left( \overbrace{-x_k x_l + \frac{r^2}{6} \delta_{kl}}^{\text{Form des Quadrupol-}} \right) \cdot \dots \left. \vphantom{\frac{1}{2} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla})^2 \Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \Big|_{\underline{r}=\underline{0}}} \right\}$$

$$\dots \cdot \frac{\partial E_{\text{ext},k}(\underline{r})}{\partial x_l} \Big|_{\underline{r}=\underline{0}}$$

Damit wird  $\Phi_{\text{ext}}$  in (2) nahe  $\underline{r}=\underline{0}$  zu:

$$\Phi_{\text{ext}}(\underline{r}) \approx \Phi_{\text{ext}}(\underline{0}) - \underline{r} \cdot \underline{E}_{\text{ext}}(\underline{0}) + \left. - \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 (\delta_{kl} x_k x_l - r^2 \delta_{kl}) \frac{\partial E_{\text{ext},k}}{\partial x_l} \right|_{\underline{r}=\underline{0}}$$

Dies setzen wir in (1) ein:

$$W_{\text{ext}} = \int d^3r \rho(\underline{r}) \Phi_{\text{ext}}(\underline{r})$$

$$= \int d^3r \rho(\underline{r}) \left[ \Phi_{\text{ext}}(\underline{0}) - \underline{r} \cdot \underline{E}_{\text{ext}}(\underline{0}) + \dots \right]$$

$$W_{\text{ext}} = Q \Phi_{\text{ext}}(\underline{0}) - \underline{P} \cdot \underline{E}_{\text{ext}}(\underline{0}) + \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 Q_{kl} \frac{\partial E_{\text{ext},k}}{\partial x_l} \Big|_{\underline{r}=\underline{0}} + \dots$$

- Größen der Ladungsverteilung  $\rho$  bei  $\underline{r}=\underline{0}$
- Größen der externen Ladungsverteilung  $\rho_{\text{ext}}$

Also:

- Gesamtladung  $Q$  wechselwirkt mit dem Potential  $\Phi_{\text{ext}}$
- Dipolmoment  $\underline{P}$  ——— || ———  $\underline{E}$ -Feld  $\underline{E}_{\text{ext}}$
- Quadrupolmoment  $Q_{ij}$  ——— || ——— Ableitung des  $\underline{E}$ -Feldes

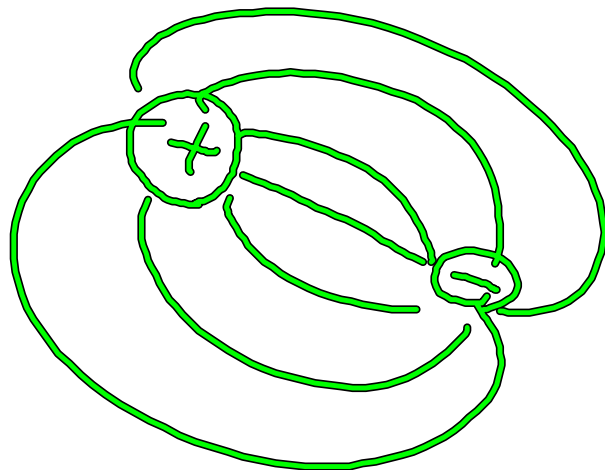
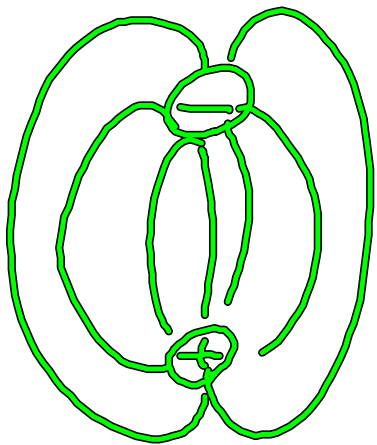
wichtiger Spezialfall: WW zweier Dipole

Annahme: Sowohl Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r})$  bei  $\underline{r}_1 = \underline{0}$  als auch  $\rho(\underline{r})$  werden allein durch das Dipolmoment beschrieben

$$W_{\text{ext}} = -\underline{p}_1 \cdot \underline{E}_{\text{Dipol 2}}(\underline{r}_1)$$

Dipol bei  $\underline{r}_1$ 
Dipol bei  $\underline{r}_2$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2}{r_1^3} - \frac{(\underline{p}_1 \cdot \underline{r}_1)(\underline{p}_2 \cdot \underline{r}_1)}{r_1^5} \right)$$



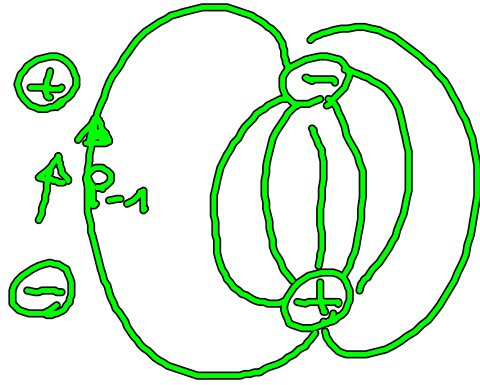
Charakteristisch: • Abstandsabhängigkeit  $\frac{1}{r^3}$   
 • Richtungsabhängigkeit!

Frage: Welche Konfiguration der Dipole ist energetisch günstig?

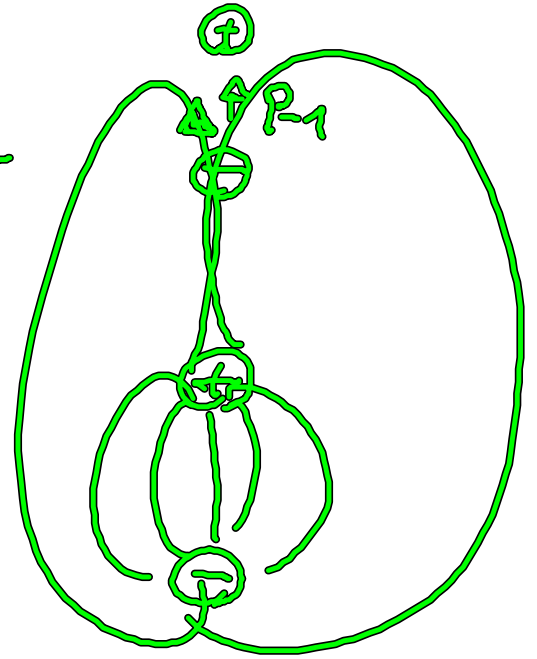
↳  $W_{\text{ext}} = -\underline{p}_1 \cdot \underline{E}_{\text{Dipol 2}}(\underline{r}_1)$



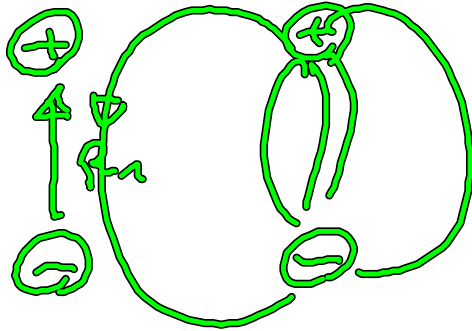
$\Rightarrow P_1 \uparrow \uparrow E_{Dipol}(\mathbf{r}_2)$



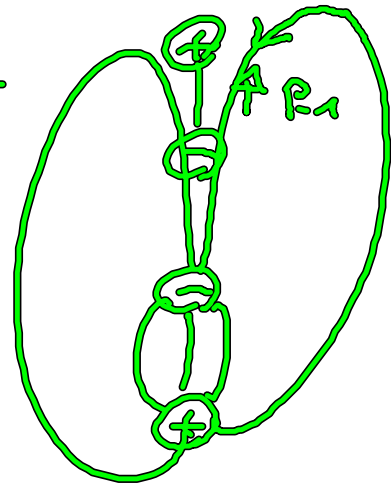
oder



$W_{ext} < 0$ , attraktiv



, oder



$W_{ext} > 0$ , repulsiv