III. Magnetostatik

⇒ Phänomene, die ~~[illegible]~~ mit stationären ~~ele~~ elektrischen Strömen und stationären Magnetfeldern zu tun haben

(analog zur Elektrostatik, wo es um ruhende Ladungsverteilungen geht)

$\rho(\underline{r})$

III.1. Elektrischer Strom

Betrachte als Beispiel einen metallischen Draht

Wie kann es überhaupt zu einem Strom in diesem Draht kommen?

Zunächst zur Erinnerung

bringe den metallischen Draht in ein äußeres elektrisches Feld ein, dessen Quellen dann abgeschaltet werden

⇒ Im Innern werden Ladungen verschoben, und zwar so daß das totale Feld innen verschwindet

⇒ es kann also kein Strom fließen,

denn wir wissen

Strom $\hat{=}$ bewegte Ladung

$\Longleftrightarrow$ es müssen also Kräfte der Form $F_i = q_i E_i^{innen}$

aber:

Durch Anbringen einer äußeren Spannungsquelle kann eine dauerhafte Potentialdifferenz im Leiter und damit ein dauerhaftes, nichtverschwindendes Feld im Leiter erzeugt werden!

$\Rightarrow$ erzeugt dauerhafte Kraft auf die Ladungsträger

$\Rightarrow$ die Ladungsträger ~~ein~~ haben eine Geschwindigkeit

$\Rightarrow$ Strom

Definition der Stromdichte

$$j(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$$

Ladung pro Volumeneinheit

Zurückgelegter Weg in Stromrichtung pro Zeiteinheit

Folgerung

$|j(\underline{r},t)|$: Ladung, die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung transportiert wird

z.B. Strom durch eine Ladung q, die in z-Richtung transportiert wird

$$|j| = \underbrace{\frac{q}{\Delta x \Delta y \cancel{\Delta z}}}_{\rho} \cdot \frac{\cancel{\Delta z}}{t} = \frac{q}{\underbrace{\Delta x \Delta y}_{\text{Flächeneinheit}}\, t}$$

<u>Stromstärke</u>

$$I = \int dF\,\underline{n} \cdot j(\underline{r},t)$$

i.A. zeitabhängig, falls j zeitabhängig

Integration über vorgegebene Fläche

Einheit des Stroms:

$$\text{Strom} \,\hat{=}\, \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$$

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

C – Coulomb

s – Sekunde

A – Ampere

<u>Beispiel</u>:

Draht unter einer zeitlich konstanten Potentialdifferenz

Strom in z-Richtung

$$\Rightarrow \underline{v}(\underline{r},t) = \underbrace{v\,\hat{\underline{e}}_z}_{\text{Zeit-Konstant}} = \frac{dz}{dt}\hat{\underline{e}}_z$$

homogene, Zeit-Konstante Ladungsdichte

$$\rho(\underline{r},t) = \frac{N}{V} q = n q$$

n – Dichte $= \frac{N}{V}$

$$\Rightarrow \underline{j}(\underline{r},t) = \underline{j} = n q v \hat{\underline{e}}_z$$

$$\Rightarrow I = \int dF\, \underline{n} \cdot j = n q v \cdot F_A$$

nehme an:
Fläche ist in der
x-y-Ebene, Flächeninhalt
ist F_A

$\underline{n} = \underline{\hat{e}_z}$

III.2. Kontinuitätsgleichung

<u>Ausgangspunkt</u> (experimentelle Erfahrung)

<u>Ladungserhaltung</u>

d.h. die zeitliche Änderung der gesamten elektrische Ladung in einem Volumen V entspricht einem <u>Stromfluß</u> durch die Oberfläche!

sei $Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t)$

betrachtetes Volumen

dann gilt:

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = 0$$

F_V (geschlossen)

in Worten: Ladungsänderung + Stromfluß = 0

umschreiben:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$$

$$\underset{\text{Satz von Gauss}}{=} \int_V d^3r\, \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$$

$$\to \int_V d^3r \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t)\right) = 0$$

Das soll für jedes Volumen V gelten!

$$\to \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

gilt immer!
(auch in der Elektrodynamik)

Kontinuitätsgleichung!

Bemerkung:
Ähnliche Gleichungen gelten in der Strömungsphysik (Massenerhaltung)
sowie bei Diffusionsprozesse (Teilchenzahlerhaltung)

Spezialisiere nun auf die Magnetostatik

Dort geht man aus von stationären Ladungsdichten

d.h. $$\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} = 0$$

Kein Widerspruch zum Stromfluss an sich!

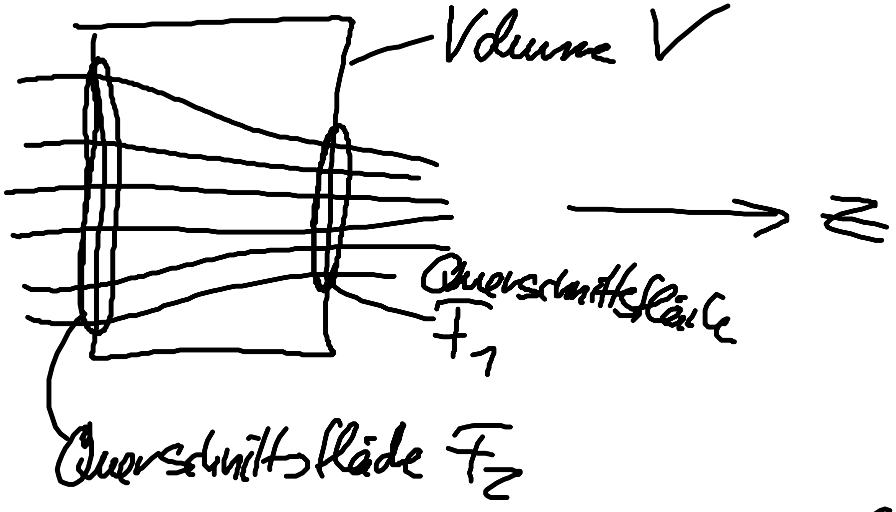
Kontinuitätsgl. $$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot j(r,t) = 0}$$

noch spezieller:
Man nimmt sogar an, daß $\boxed{\begin{array}{l} j(r,t) = j(r) \\ \text{und } \nabla \cdot j(r) = 0 \end{array}}$

stationäre Ströme

Folgerung

Im stationären Fall fließt durch jeden Querschnitt des Leiters derselbe Strom



es gilt: $\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}) = 0 \longrightarrow \int_V d^3r \, \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}) = 0$

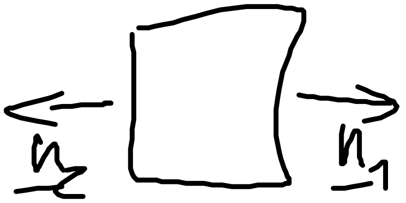
Satz von Gauss

$$\int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r}) = 0$$

F_V – geschlossene Oberfläche von V

Annahme: Nur ~~Stirn~~ "Stirnflächen" tragen zum Integral bei, da sonst $\underline{n} \perp \underline{j}$

$$\longrightarrow \int_{F_1} dF \, \underline{n}_1 \cdot \underline{j}(\underline{r}) + \int_{F_2} dF \, \underline{n}_2 \cdot \underline{j}(\underline{r}) = 0$$



d.h. $\underline{n}_1 = -\underline{n}_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{F_1} dF\, \underline{n}_1 \cdot \underline{j}(\underline{r})}_{I_1} - \underbrace{\int_{F_2} dF\, \underline{n}_1 \cdot \underline{j}(\underline{r})}_{I_2} = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2$$

Bemerkung zur mikroskopischen Deutung
im Stromdichte im stationären Fall

wir hatten:

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$$

Betrachte System aus Punktladungen

$$\rho(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

direkte Verallgemeinerung aus der Elektrostatik,
dort $\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

⇒ naheliegende mikroskop. Deutung der Stromdichte

$$\textcircled{*} \; j(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \dot{\underline{r}}_i(t) \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

zeitl. Änderung von $\underline{r}_i$
⇒ 'Teilchengeschwindigkeit'

Betrachte jetzt stationäre Ströme, d.h. $j(\underline{r},t) = j(\underline{r})$

Streng genommen ist das ein Widerspruch zur mikroskop. Definition (*) von j, in der ja Zeitableitung vorkommt!

Ausweg!

man betrachtet $\underline{j}(\underline{r})$ als mittleren Strom, ~~in d~~ wo man eine im Mittel konstante Teilchengeschwindigkeit und Ladungsdichte hat!

$$\text{z.B.} \quad \underline{j}(\underline{r}) = \underbrace{\rho}_{\text{Konstante Ladungsdichte}} \overbrace{\underline{v}}^{\text{Konstante Geschwindigkeit}}$$

Ein solcher Mittelungsprozess ist formal machbar ⟶ später!

III.3. Magnetische Induktion, Kraft

Stromdichte (d.h. bewegte Ladungen) erzeugen magnetische Felder

Definition

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Biot-Savart'sches Gesetz

$\underline{B}(\underline{r})$ ist das Feld, das eine Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$ am Ort $\underline{r}$ erzeugt

μ_0: Konstante

Beachte Analogie zur Elektrostatik

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \, \rho(\underline{r}') \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

es gilt:

$$\mu_0 = 4\pi \, 10^{-7} \, \frac{Vs}{Am}$$

Kombiniert man μ_0 mit der Konstanten $\varepsilon_0 = 8.8543 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$$ mit c: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum!

$\Rightarrow$ Die Konstanten ε_0 und μ_0 sind nicht unabhängig!

Hintergrund: Unterschied zw. bewegten Ladungen (Magnetostatik)
und ruhenden Ladungen (Elektrostatik)
ist Frage des Bezugsystems
⇒ spezielle Relativitätstheorie!!

Zur Einheit des Feldes $\underline{B}(\underline{r})$

$$[B] = 1T \quad \text{Tesla}$$
$$= 1\frac{Ns}{Cm}$$

benutze: $1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$

$$1C = 1As$$

$$1T = \frac{kg\,m \cdot s}{s^2 A s m} = 1\frac{kg}{As^2} = 1V\frac{s}{m^2}$$

$$\uparrow$$

$$1V = 1\frac{Nm}{As}$$
$$= 1\frac{kg\,m^2}{As^2}$$

Konsistent mit Biot-Savart!

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\ \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

⇒ Dimension

$$B \mathrel{\hat{=}} \underbrace{\frac{Vs}{Am}}_{\text{von } \mu_0} \underset{\text{Volumen-integral}}{m^3} \underset{\text{von } j}{\frac{A}{m^2}} \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$= \frac{Vs}{m^2}$$

✓