Wh: $\underline{j}(\underline{r},t)$ Stromdichte

Magnetostatik $\underline{j}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r})$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = 0$$

$$\nabla\cdot\underline{j}(\underline{r}) = 0$$

Biot-Savart: $$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\times\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

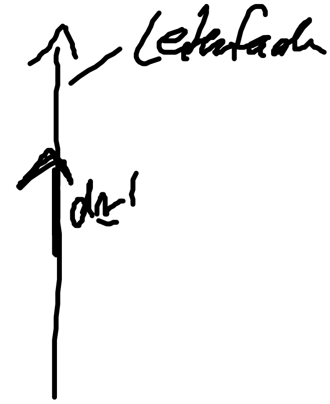
(analog Elektrostatik)
$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$$

<u>Spezialfall:</u> Wir betrachten geraden "Leiter-Faden" mit homogener Stromstärke I

$$\underline{j}(\underline{r}')\,d^3r'$$
$$= \rho\,\underline{v}'\,d^3r' = \rho\,\frac{d\underline{r}'}{dt}\,d^3r'$$

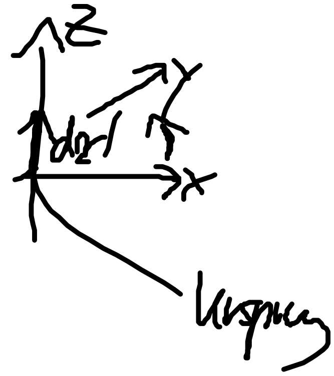
$$= \underbrace{\rho \frac{d^3r'}{dt}}_{I}\, d\underline{r}' \leftarrow \text{Wegelement} \qquad = I\, d\underline{r}'$$



bemerke Interpretation, daß Strom gleich Ladung pro Zeiteinheit

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Weg}} d\underline{r}' \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Auswertung in Zylinderkoordinaten

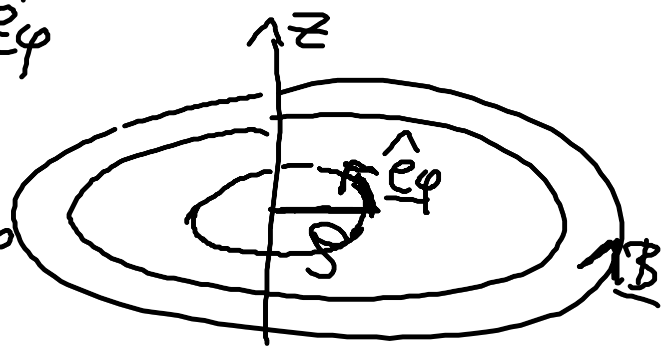


$$d\underline{r}' = dz'\,\hat{\underline{e}}_z$$

$$(\underline{r}-\underline{r}') = \rho\,\hat{\underline{e}}_\rho + (z-z')\,\hat{\underline{e}}_z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{Abstand}$$

$$d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}') = dz'\,\rho\,\hat{\underline{e}}_\varphi$$

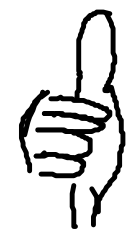


$$\Rightarrow \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho}\, \underline{e}_\varphi$$

Man ~~stellt~~ sieht:

- $|\underline{B}|$ nimmt ab mit $\frac{1}{\rho}$ $\hat{=} \frac{1}{\text{Abstand senkrecht zum Leiter}}$

- Die Richtung von $\underline{B}$ ist durch $\hat{e}_\varphi$ gegeben
- "Rechtsschraube"



„rechte-Hand-Regel"

- B-Linien sind geschlossen!

Kraft zwischen zwei Stromdichten

Definition:

(*) $$\boxed{\underline{F} = \int d^3r \; \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r})}$$ Ampere'sches Gesetz

(**) $$\boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r \int d^3r' \; \underline{j}(\underline{r}) \times \left(\underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right)}$$

Biot-Savart

analog zur Coulomb-Kraft in der Elektrostatik

$$\underline{F}^{\text{Coulomb}} = \int d^3r\, \rho(\underline{r})\, \underline{E}(\underline{r})$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r'\, \rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')\, \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Spezialfall von (*)

Stromdichte beschreibt Bewegung einer Punktladung

$$\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})\,\underline{v} = q\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0(t))\,\underline{v}$$

aus (*)

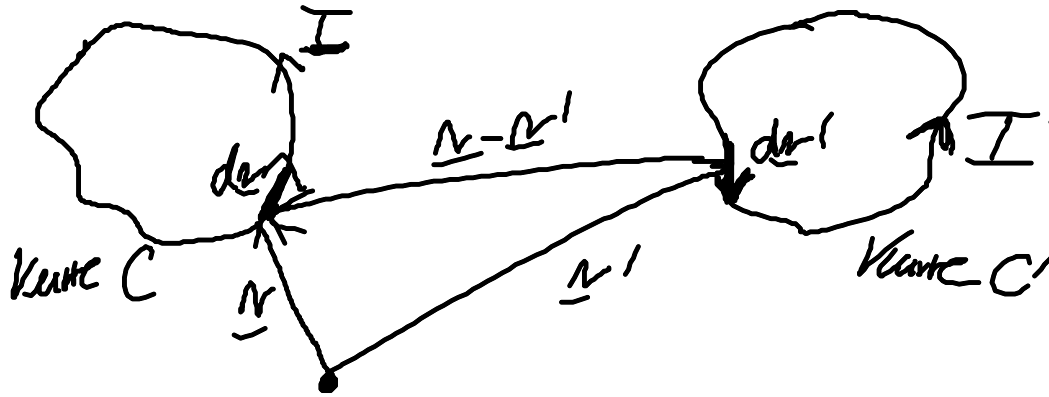
$$\Rightarrow \underline{F} = \int d^3r\; \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r})$$
$$= q\,\underline{v}(\underline{r}_0) \times \underline{B}(\underline{r}_0)$$

Anteil des Magnetfeldes zur Lorentzkraft!

$$\left(\underline{F}^{\text{Lorentz}} = q\underline{E} + q\,\underline{v}\times\underline{B}\right)$$

Spezialfall von (**)

Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leiterschleifen (mit konstanten Stromstärken)



setze $\underline{j}(\underline{r})\,d^3r = I\,d\underline{r}$

$\underline{j}(\underline{r}')\,d^3r' = I'\,d\underline{r}'$

Einsetzen in (**)

Kurvenintegral

$$\Rightarrow \underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \oint_C d\underline{r} \oint_{C'} d\underline{r}' \, \frac{d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}'))}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Das doppelte Vektorprodukt kann noch umgeschrieben werden

$$d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}'))$$

$$= d\underline{r}' \underbrace{(d\underline{r} \cdot (\underline{r}-\underline{r}'))}_{\text{Skalarprodukt}} - (\underline{r}-\underline{r}') \underbrace{(d\underline{r} \cdot d\underline{r}')}_{\text{Skalarprodukt}}$$

Der 1. Term ergibt eingesetzt:

$$\int_{C'} d\underline{r}' \int_C d\underline{r} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \int_{C'} d\underline{r}' \int_C d\underline{r} \cdot \underbrace{\nabla_{\underline{r}}}_{\text{Gradient}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}(-1)$$

$$\overset{\text{Stokes'scher Integralsatz}}{=} \int_{C'} d\underline{r}' (-1) \int_{F_C} \underbrace{\text{rot grad} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{0} \cdot d\underline{F} = \underline{\underline{0}} \ !$$

Es bleibt also:

$$\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \oint_C \oint_{C'} d\underline{r} \cdot d\underline{r}' \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Gesamtkraft zwischen den ~~Leiterstücke~~ Leiterschleife

man sagt

- Leiterstücke, in denen der Strom parallel fließt ($I \, d\underline{r} \cdot I' d\underline{r}' > 0$), ziehen sich an
- Leiterstücke, in denen der Strom antiparallel fließt, stoßen sich ab!

III. 4: Grundgleichungen der Magnetostatik, Vektorpotential

Zunächst Umformulierung von Biot-Savart

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r \; \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

betrachte

$$\nabla_{\underline{r}} \times \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \mathrm{rot}_{\underline{r}} \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\xrightarrow{\text{Produktregel}} = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \cancel{\mathrm{rot}_{\underline{r}} \underline{j}(\underline{r}')} - \underline{j}(\underline{r}') \cdot \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Grund: Ableitung nach der "falsche Variable"

$$\nabla_{\underline{r}} \times \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Kombiniere das mit Biot-Savart

$$\Rightarrow \underline{B}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Definiere das Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})}$$

Analogie:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})$$

Skalares Potential

beachte!

Es gibt Freiheit bei der Definition von $\underline{A}(\underline{r})$

$$\underline{A}(\underline{r}) \rightarrow \underline{A}'(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r}) + \operatorname{grad} \varphi(\underline{r})$$

Das ist eine sogenannte "Eichtransformation"

sie läßt $\underline{B}(\underline{r})$ invariant (da $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\varphi)) = 0$)

Wichtig

Folgerung aus $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0}$$

da $\mathrm{div}(\mathrm{rot} \ldots) = 0$

Bedeutung: Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole)!

vergleiche zu der Elektrostatik

$$\boxed{\mathrm{div}\, \underline{E}(r) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}}$$

außerdem:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Longrightarrow \oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{B}(r) = 0$$

Gauss'scher Integralsatz

Fluß der magnetischen Induktion durch beliebiges Volumen V ist null!

Formuliere nun differentiellen Zusammenhang zwischen

$\underline{B}$ und $\underline{j}$

Ausgangspunkt:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times A(\underline{r}) \quad , \quad \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times (\nabla \times \underline{A})$$

$$= \underbrace{\nabla}_{\text{grad}} (\underbrace{\nabla \cdot \underline{A}}_{\text{div}}) - \Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r})$$

Laplace-Operator, hier angewendet auf jede Komponente von $\underline{A}$!

Betrachte 1. Term

$$\nabla_{\underline{r}} \left(\nabla_{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r}) \right)$$

$$= \nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \nabla_{\underline{r}} \cdot \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$

beachte: $\nabla_{\underline{r}}$ wirkt nicht auf $\underline{j}(\underline{r}')$!

$$= \nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\nabla_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}} \right)$$

$$= \nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \left(-\nabla_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) \right)$$

$$= \nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left[-\nabla_{\underline{r}'} \cdot \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j}(\underline{r}') \right] \right)$$

benutze die Produktregel in umgekehrte Richtung

benutze

$$\nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j}(\underline{r}') = 0$$

$$= -\nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \nabla_{\underline{r}'} \cdot \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$ wegen Kontinuitätsgleichung!

$$= -\nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{F_V} d\underline{F}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$

Gauss'scher Integralsatz

F_V geschlossene Oberfläche

Annahme: Integrand $\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ verschwindet für hinreichend rasch abklingende Stromdichten!

$$\Rightarrow \oint_{F_V} d\underline{F}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = 0$$

$\underline{A}$

$= 0$

$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r})$$

$$= \cancel{\nabla(\nabla \cdot \underline{A})} - \Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r})$$

$$= -\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r})$$

benutze bekannten

Integralausdruck für $\underline{A}$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\, \underbrace{\Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Elektrostatik

$$= \mu_0\, \underline{j}(\underline{r})$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0\, \underline{j}(\underline{r})}$$

stationäre Ströme erzeugen magnetostatische Felder

Wirbel

Kann noch umgeschrieben werden:

$$\oint_F d\underline{F}\,(\nabla \times \underline{B}) \underset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} d\underline{r}\,\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \oint_F d\underline{F}\,\underline{j}(\underline{r}) = \mu_0 I$$

Ampere'sches Durchflutungsgesetz