Wh: Biot-Savart

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})$$

Vektorpotential

mit

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

wg. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{A}) = 0$

$$\longrightarrow \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0 \quad !$$

$$\nabla_{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r}) = \ldots = -\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r})$$

$$= \ldots = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

Nachbemerkung zum Vektorpotential

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

Eichtransformationen:

$$\underline{A}(\underline{r}) \longrightarrow \underline{A}'(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r}) + \nabla \varphi(\underline{r})$$

$$\underline{B}'(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}'(\underline{r})$$

$$= \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})$$

da rot grad $\varphi = 0$

$$= \underline{B}(\underline{r})$$

dieselbe physikalische Größe!

!!

Eine spezielle Eichung ist die sogenannte Coulombeichung

$$\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) = 0$$

das hatten wir benutzt um den Zusammenhang

$$\nabla_{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r}) = -\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r})$$

halten

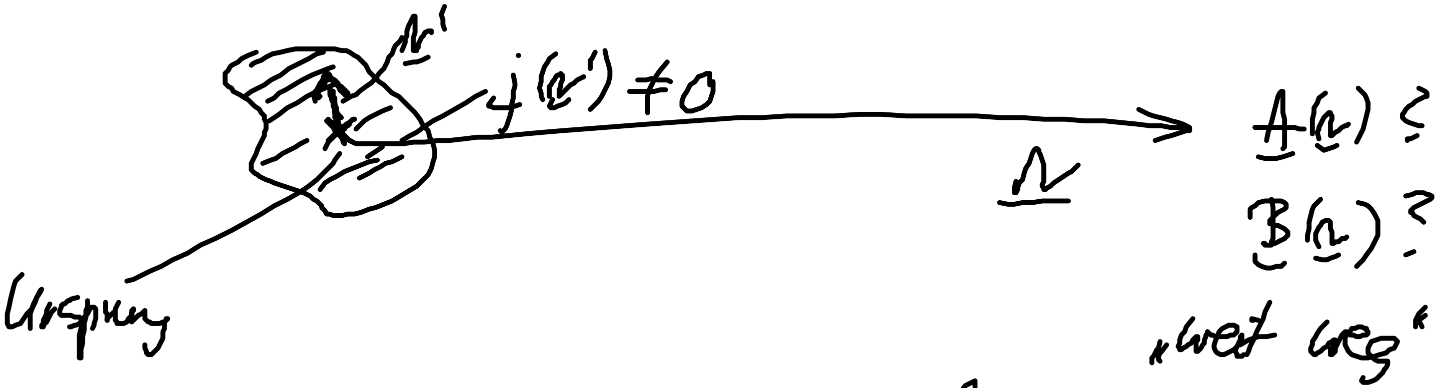
denn $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

und $\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$

später: Einführung der Lorentzeichung

III.5. Magnetische Multipole

betrachte räumlich begrenzte Stromverteilung



$\Rightarrow$ Betrachte also $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

für $r \gg r'$ — innerhalb des Gebiets der Stromdichte

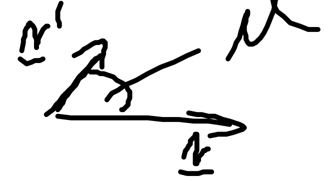
$\Leftrightarrow \frac{r'}{r} \ll 1$

Vorgehensweise analog zu Elektrostatik!

$\Rightarrow$ Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

in Potenzen von $\frac{r'}{r}$

Betrachte nun die ersten beiden Terme



$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \cos\vartheta\left(\frac{r'}{r}\right) + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r^3} + \dots$$

$\underline{r}\cdot\underline{r}' = r r' \cos\vartheta$

$\Rightarrow \cos\vartheta = \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r r'}$

Einsetzen in den Ausdruck für $\underline{A}(\underline{r})$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_V d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')}_{\underline{A}^{(0)}(\underline{r})\ \text{Monopolbeitrag}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int_V d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')}_{A^{(1)}(\underline{r})\ \text{Dipolbeitrag}}$$

$$+ \dots$$

Zum Monopol-Beitrag

betrachte

k-te Komponente des Vektors $\underline{r}'$

$$\nabla_{\underline{r}'} \cdot \left(x_k' \, \underline{j}(\underline{r}') \right)$$

$$= x_k' \underbrace{\cancel{\nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j}(\underline{r}')}}_{\substack{\text{Null wg.} \\ \text{Kontinuitätsgl.} \\ \nabla \cdot \underline{j} = 0}} + \underline{j}(\underline{r}') \cdot \nabla_{\underline{r}'} x_k'$$

Produktregel

$$= \underline{j}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{\underline{r}'} x_k'}_{\substack{\text{Einheitsvektor} \\ \text{in Richtung } k}}$$

$$= j_k(\underline{r}')$$

also

$$A_k^{(0)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V d^3r' \, j_k(\underline{r}')$$

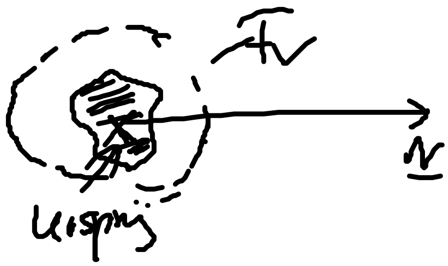
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \, \nabla_{\underline{r}'} \cdot \left(x_k' \, \underline{j}(\underline{r}') \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_{F_V} dF'\, x_k'\, \underline{j}(\underline{r}') = 0$$

Gauss'scher Satz

Stromdichte Null auf F_V

Oberfläche des gesamten Raums



≙ Oberfläche eines Gebiets, in dem der Strom schon Null ist

$\Rightarrow$ Monopolbeitrag zu $\underline{A}$ verschwindet!

Nächster Beitrag

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int d^3r'\, \underline{(\underline{r}\cdot\underline{r}')\, \underline{j}(\underline{r}')}$$

Ziel: So umformen, dass Beitrag dem Ausdruck des elektrostatischen Dipols ähnelt

- betrachte Hilfsformel

$$\left.\begin{aligned}(\underline{r}'\times \underline{j}(\underline{r}'))\times \underline{r} &= (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}') \\ &\quad - (\underline{j}(\underline{r}')\cdot\underline{r})\,\underline{r}'\end{aligned}\right\}$$

$$= 2(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}') - \left[(\underline{r}'\cdot\underline{r})\,\underline{j}(\underline{r}') + (\underline{j}\cdot\underline{r})\,\underline{r}'\right]$$

· in $\underline{A}^{(1)}$ eingesetzt:

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}\int d^3r'\,\left(\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}')\right)\times\underline{r} +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}\int d^3r'\left[(\underline{r}'\cdot\underline{r})\,\underline{j}(\underline{r}') + (\underline{j}(\underline{r}')\cdot\underline{r})\,\underline{r}'\right]$$

· der zweite Term ist Null, denn

$$\underline{\nabla}'\cdot\left[x_k'(\underline{r}'\cdot\underline{r})\,\underline{j}(\underline{r}')\right] = \left(\underline{\nabla}' x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\right)\underline{j}(\underline{r}') + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underbrace{\underline{\nabla}'\cdot\underline{j}(\underline{r}')}_{=0}$$

$$= \underbrace{(\underline{\nabla}' x_k')}_{\underline{e}_k}\,\underline{r}\cdot\underline{r}'\,\underline{j} + x_k'\underbrace{\underline{\nabla}'(\underline{r}\cdot\underline{r}')}_{\underline{r}}\,\underline{j}(\underline{r}')$$

$$= (\underline{r}'\cdot\underline{r})\,j_k(\underline{r}') + x_k'\,\underline{r}\cdot\underline{j}(\underline{r}')$$

· Also: $\int d^3r'\left[(\underline{r}'\cdot\underline{r})\,\underline{j}(\underline{r}') + (\underline{j}(\underline{r}')\cdot\underline{r})\,\underline{r}'\right]$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}' \left[x_k' (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \, \underline{j}(\underline{r}') \right] \underline{e}_k$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \underline{e}_k \oint d\underline{F} \cdot \left[x_k (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \, \underline{j}(\underline{r}') \right] = 0$$

hier ist $\underline{j}(\underline{r}') = \underline{0}$

- Nur der erste Term bleibt übrig

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int d^3r' \left(\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') \right) \times \underline{r}$$

- Definiere: magnetische (Dipol-) Moment

$$\boxed{\underline{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')}$$

vgl. E-Statik

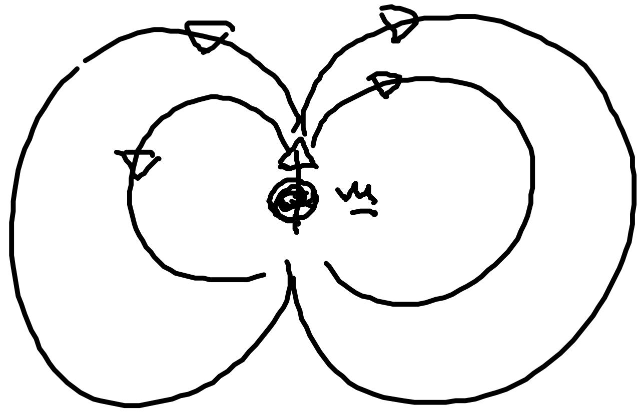
$\underline{P} = \int d^3r' \, \underline{r}' \rho$

- Dann:

$$\underline{A}(\underline{r}) \approx \underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3}$$

- Feld des magnetischen Dipols

$$\underline{B}^{Dip}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{A} \overset{(A1)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\underline{r}\cdot\underline{m})\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{m}}{r^3}\right)$$



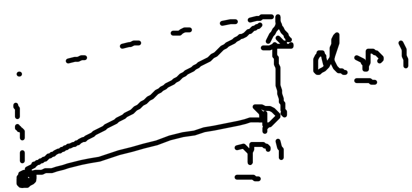
- Beispiele für das magnetische Moment

(a) ebene Leiterschleife

hier: $\underline{j}(\underline{r}')\, d^3r' = \underline{I}\, d\underline{r}'$

$$\hookrightarrow \underline{m} = \frac{1}{2}\,\underline{I} \oint_C \underline{r}' \times d\underline{r}'$$

beachte:



$$|\underline{r}' \times d\underline{r}'| = 2\,dF$$

$$\underline{m} = \underline{I}\; F_c\; \underline{n}$$

F_c: Fläche der Schleife

$\underline{n}$: Normalenvektor der Schleife

$\longrightarrow$ $\underline{m}$ steht senkrecht auf Ebene der Schleife

(b) bewegte Punktladungen

N Teilchen, jeweils mit Ladung q und Masse M

Geschw.

Strom: $\underline{j}(\underline{r}') = q \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r}' - \underline{R}_i(t))\, \underline{v}_i$

Ort des i-ten Teilchens zur Zeit t

$$\hookrightarrow \underline{m} = \frac{1}{2} \int d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')$$

$$= \frac{q}{2} \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i \times \underline{v}_i \quad , \quad \underline{p}_i = M \underline{v}_i \text{, Impuls}$$

$$= \frac{q}{2M} \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i \times \underline{p}_i \quad , \quad \underline{l}_i = \underline{R}_i \times \underline{p}_i$$

Drehimpuls

$$\underline{m} = \frac{q}{2M} \underline{\underline{L}} \quad , \quad \underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{l}_i$$

- Das Verhältnis $\frac{|\underline{m}|}{|\underline{L}|}$ bezeichnet man als
<u>gyromagnetisches</u> Verhältnis

- klassisches Ergebnis: $\frac{|\underline{m}|}{|\underline{L}|} = \frac{q}{2M}$

gilt auch im atomaren Bereich?
auch für „Bahnbewegung" der
Elektronen um Atomkerne

- Abweichung: bei intrinsischen Drehimpuls = Spin
z. B. Spin $\underline{S}$ des Elektrons

$$\frac{|\underline{m}|}{|\underline{S}|} \approx \frac{e}{M}$$

Unterschied zum klass. Ergebnis ist
ungefähr Faktor 2

III.6 Kraft auf einen magnetischen Dipol im Magnetfeld

- Allgemein: Kraft auf eine Stromverteilung (s. III.3)

$$\underline{F} = \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}')$$

- $\underline{j}$ ist wieder lokalisiert bei $\underline{r}$
- $\underline{B}$ wird von externen Strömen $\underline{j}^{ext}$ außerhalb der Stromverteilung $\underline{j}$ erzeugt
- Annahme: bei $\underline{r}$ ist $\underline{B}$ nur schwach inhomogen

$\rightarrow$ Taylor-Entwicklung:

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + \left[(\underline{r}'-\underline{r}) \cdot \underline{\nabla}\right] \underline{B}(\underline{r}) + \ldots$$

vernachlässige höhere Terme

- dies in $\underline{F}$ eingesetzt

$$\underline{F} = \underbrace{\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r})}_{=0\text{, da keine Monopole}} + \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \left[(\underline{r}'-\underline{r}) \cdot \underline{\nabla}\right] \underline{B}(\underline{r})$$

$$= \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r}' \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}(\underline{r}) - \underbrace{\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}(\underline{r})}_{=0\text{, da keine Monopole}}$$

- Ziel: bringe ersten Term auf Form des Dipolmoments $\underline{m}$

- dazu:

$$\underline{r}' \times \big(\underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{r})}_{=\mu_0 \underline{j}^{ext}(\underline{r}) = 0}\big) = \underline{\nabla}\big(\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})\big) - (\underline{r}' \cdot \underline{\nabla})\, \underline{B}(\underline{r})$$

$$\Rightarrow \quad (\underline{r}' \cdot \underline{\nabla})\, \underline{B}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\big(\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})\big) \qquad (*)$$

- in Kraft eingesetzt

$$\underline{F} = \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{\nabla}\big(\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})\big)$$

$$= -\int d^3r'\, \underline{\nabla} \times \big[\underline{j}(\underline{r}')\, (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r}))\big], \quad \text{da } \underline{\nabla} \times \underline{j}(\underline{r}') = \underline{0}$$

$$= -\underline{\nabla} \times \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\, \big(\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})\big)$$

nun gleiche Rechnung wie bei Vereinfachung des $\underline{A}^{(1)}(\underline{r})$-Terms in Multipolentwicklung

$$\Big\lceil \int d^3r'\, (\underline{r} \cdot \underline{r}')\, \underline{j}(\underline{r}') = \underline{m} \times \underline{r} \Big\rfloor$$

$$= -\underline{\nabla} \times \big(\underline{m} \times \underline{B}(\underline{r})\big)$$

$$= -\underline{m}\,(\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{B}}_{=0}) + (\underline{m} \cdot \underline{\nabla})\, \underline{B}(\underline{r})$$

$$\overset{(*)}{=} \boxed{\underline{\nabla}\big(\underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{r})\big) = \underline{F}}$$

Kraft auf magnetischen Dipol

- Allgemein:

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}\, U(\underline{r})$$

hier: $U(\underline{r}) = -\underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{r})$

- Minimierung der potentiellen Energie U führt dazu, dass sich Dipol parallel zum äußeren Feld ausrichtet

  $\Rightarrow$ Kompass