

Zusammenfassend: Maxwellgleichungen

differential-Form

- $\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t)$
- $\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r}, t)$
Induktionsgesetz

Integral-Form

$$\int_V d\underline{r} \cdot \underline{D} = \int_V \rho(\underline{r}, t)$$
$$\oint_C \underline{dr} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d\underline{r} \cdot \underline{B}(\underline{r}, t)$$
$$\int_V d\underline{r} \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = 0$$

- $\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = 0$

- $\nabla \times \underline{H}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r}, t)$
Maxwell'sches Ergänzungsgesetz

$$\oint_C \underline{dr} \cdot \underline{H}(\underline{r}, t) = \int_V d\underline{r} \cdot \underline{j}(\underline{r}, t) + \int_V d\underline{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}$$

Bemerkungen

- Maxwell-Gl. linear in den Feldern

→ Superpositionsprinzip

- ES kommen nur 1. Ableitungen bzgl. der Zeit vor

→ Durch Vorgabe der Felder bei $t=0$ sind die Felder bei $t>0$ vollständig bestimmt!

- Die letzte Gl. enthält die Kontinuitätsgleichung!

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \underline{H})}_0 = \nabla \cdot \underline{j} + \underbrace{\nabla \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}}_{\frac{\partial \nabla \cdot \underline{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}}!$$

- Die angegebenen Gleichungen gelten auch "in Materie"!

— nun stimmen dann die Beziehungen

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$$

Vakuum

nicht mehr!
 (Materialbeziehungen
 → später)

IV.5. Energiebilanz in der Elektrodynamik

Frage: Enthalten die Maxwell-Gl. neben der Kontinuitätsgl. noch weitere Erhaltungssätze (bzw. Bilanzgleichungen)

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0 \quad | \cdot \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \underline{j} \quad | \cdot \underline{E}$$

Multiplikation

Subtrahiere

$$\underline{H} \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H}) + \underbrace{\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0^{-1} \underline{B}^2 \right)} + \underbrace{\underline{E} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 \right)} = -\underline{j} \cdot \underline{E}$$

$$\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0^{-1} \underline{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 \right) = -\underline{j} \cdot \underline{E}$$

definiere die Energiedichte
des elektrodyn. Feldes

$$w(\underline{r}, t) := \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\underline{B}(\underline{r}, t))^2$$

in Analogie zu den entsprechende
Beziehungen in der Statik!

definiere außerdem das Poynting-Vektor

$$\underline{S}(\underline{r}, t) := \underline{E}(\underline{r}, t) \times \underline{H}(\underline{r}, t)$$

„Energiestromdichte“

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} w(\underline{r}, t) + \nabla \cdot \underline{S}(\underline{r}, t)}_{\substack{\text{zeitl. Änderung} \\ \text{der Energiedichte}}} = -\underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{E}(\underline{r}, t)$$

„Energie-Bilanzgleichung“

in integraler Form

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V d^3r w(\underline{r}, t)}_{\substack{\text{belichtes Volume} \\ \text{feldenergie}}} + \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{S}(\underline{r}, t) \stackrel{\text{Gauss'scher Satz}}{=} - \int_V d^3r \underline{j} \cdot \underline{E}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r w(r,t) + \int_{FV} dF \cdot \underline{S}(r,t) = - \int d^3r \underline{j}(r,t) \cdot \underline{E}(r,t)$$

Die Feldenergie in einem Volume V kann sich auf 2 Arten ändern

- durch einen Energiestrom (Strahlung) durch die Oberfläche des Volumens V
- durch Umwandlung von Feldenergie in "mechanische Energie"

$$\frac{dW^{\text{mech}}}{dt} = \int d^3r \underbrace{j(r,t) \cdot E(r,t)}_{\text{Leistungs-dichte}}$$

Begründung?

Betrachte Ladung q im elektromagnet. Feld
Es wirkt die Lorentzkraft

$$\underline{F} = q \underline{E} + q \underline{v} \times \underline{B} \quad \text{mit } \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

Verschiebe das Teilchen um $d\underline{r}$

\Rightarrow Felder leisten die Arbeit $dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$ (Kraft mal Weg)

$$\Rightarrow dW = q \underline{E} \cdot d\underline{r}$$

(denn das Magnetfeld

leistet keinen Beitrag wegen $\frac{\underline{v} \times \underline{B} \cdot d\underline{r}}{dt}$)

Zugehörige Leistung (Arbeit pro Zeit)

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= q \underline{E} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = q \underline{E} \cdot \underline{v} \\ &= \underline{j} \cdot \underline{E} \end{aligned}$$

Typischerweise ist

$$\frac{dW^{\text{mech}}}{dt} > 0$$

$$\Leftrightarrow - \int_V d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, t) < 0$$

denn:

„Ohm'sches Gesetz“

in vielen Metallen gilt $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, t)$

(lineare Zusammenhang,
räuml. lokal, zeitlich instantan)

Leitfähigkeit
konstant, $\sigma > 0$

$$\Rightarrow - \int_V d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, t)$$

$$= - \underbrace{\sigma \int_V d^3r (\underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, t))^2}_{< 0}$$

Verlust von Feldenergie durch Stromfluss!

und:
Feldenergie kann auch dann kleiner werden, wenn der
Energiestrom durch die Oberfläche verschwindet:

analog kann man eine Gleichung
zur Impulshilanz herleiten

→ Übung

$$\underline{P}^{\text{Feld}} = \int_V d\underline{v} (\underline{D}(\underline{r}, t) \times \underline{B}(\underline{r}, t))$$

IV.6. Elektromagnetische Potentiale, Eichungen

Erinnerung Stahl

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = -\nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta \phi = -\frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad \rightarrow \quad \Delta \underline{A}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}$$

$$\uparrow \quad \text{div } \underline{A} = 0$$

Verallgemeinerung für Dynamik?

Startpunkt:

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ansatz wie in Kapitel 5.1}$$
$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t)$$

setze dies in das Induktionsgesetz ein

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}(\underline{r}, t)}{\partial t} \right) = 0$$

Ansatz für \underline{E} :

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = -\nabla_{\underline{r}} \phi(\underline{r}, t) - \frac{\partial \underline{A}(\underline{r}, t)}{\partial t}$$

erfüllt offensichtlich das Induktionsgesetz! (wegen $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$)

man nennt $\phi(\underline{r}, t)$ und $\underline{A}(\underline{r}, t)$ die elektrodynamischen Potentiale.

Mann sieht aus den Ansätzen, dass
Eldtransformationen möglich sind!

a) B ändert sich nicht

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \rightarrow \underline{A}'(\underline{r}, t) = \underline{A}(\underline{r}, t) + \nabla_{\underline{r}} \phi(\underline{r}, t)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}' &= \nabla \times \underline{A}' \\ &= \nabla \times \underline{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla_{\underline{r}} \phi}_0 \\ &= \underline{B} \end{aligned}$$

b) Da A auch in E(r, t) vorkommt, muß $\phi(\underline{r}, t)$ passend mittransformiert werden!

$$\begin{aligned} \underline{E}'(\underline{r}, t) &= -\nabla_{\underline{r}} \phi'(\underline{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}'(\underline{r}, t) \\ &\stackrel{!}{=} \underline{E}(\underline{r}, t) \end{aligned}$$

\swarrow
 $\underline{A} + \nabla_{\underline{r}} \phi$

$$\rightarrow -\nabla_{\underline{r}} \phi' - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} - \nabla_{\underline{r}} \frac{\partial}{\partial t} \phi$$

$$\Rightarrow \Phi'(r,t) = \Phi(r,t) - \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r,t)$$

Folgende Transformationen sind erlaubt:

$$A(r,t) \rightarrow A'(r,t) = A(r,t) + \nabla_{\underline{r}} \varphi(r,t)$$

$$\Phi(r,t) \rightarrow \Phi'(r,t) = \Phi(r,t) - \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r,t)$$

Eichinvarianz:

$$\underline{B}'(r,t) = \underline{B}(r,t)$$

$$\underline{E}'(r,t) = \underline{E}(r,t)$$

φ heißt
Eichfunktion

Frage: Welche Eichungen sind zweckmäßig?

Ziel ist immer die größtmögliche Vereinfachung
der Maxwell-Gleichung bzw. der resultierende
Potentialgleichungen!

Wir wissen: mit $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

ist $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ und $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ bereits erfüllt!

Betrachte zunächst:

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow -\Delta \phi - \nabla \cdot \dot{\underline{A}} = \rho / \epsilon_0$$

$\downarrow \frac{\partial \underline{A}(\underline{r}, t)}{\partial t}$

andereits

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \underline{E} \quad \rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \underline{A})$$

$$(\Leftrightarrow \nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \underline{\dot{D}}) \quad = \mu_0 \underline{j} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \dot{\phi} - \mu_0 \epsilon_0 \ddot{\underline{A}}$$

Linke Seite der 2. Gleichung

$$\text{grad}(\text{div } \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

$$= \mu_0 \underline{j} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \dot{\phi} - \mu_0 \epsilon_0 \ddot{\underline{A}}$$

benutze $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\rightarrow \Delta \underline{A}(\underline{r}, t) + \nabla \cdot \dot{\underline{A}}(\underline{r}, t) = - \frac{\underline{j}(\underline{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$\left(\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} \right)(\underline{r}, t) - \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) + \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(\underline{r}, t) \right) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t) \quad \textcircled{\text{II}}$$

man sieht:

Ⓘ und Ⓜ

(inhomogenen Maxwell-Gl.
ausgedrückt durch ϕ und \underline{A})

Sind gekoppelt!

Ziel: Entkopplung durch passende Eichtransformationen

Es gibt 2 gängige Eichtransformationen

i) Die Lorenz - Eichung

Wähle die Eichfunktion so, daß

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} = 0$$

⇒ aus (I) wird offensichtlich

$$\left(\Delta_{\underline{N}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) \underline{A}(\underline{r}, t) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t)$$

□ d'Alembertsche Operate

außerdem..

$$\nabla \cdot \dot{\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t)$$

$$= -\frac{1}{c^2} \ddot{\phi}(\underline{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi(\underline{r}, t)$$

Damit wird aus f. (I)

$$\Rightarrow \square \phi(\underline{r}, t) = -\frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0}$$